Exame de Qualificação
Geometria Riemanniana
Agosto de 2000

1. Seja M uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n, com grupo de isometrias G.

   (a) Seja $\phi \in G$ tal que existe $p \in M$ com $\phi(p) = p$, $(d\phi)_p = \mathrm{Id}$. Mostre que ϕ é a identidade.

   (b) Seja $O(M) = \{(p, e_1, \ldots, e_n) : p \in M,\ e_i \in T_pM, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}\}$ o espaço das bases ortonormais. Suponha conhecido que $O(M)$ é uma variedade de dimensão $n(n+1)/2$. Fixe $(p, e_i, \ldots, e_n) \in O(M)$. Defina uma aplicação $A : G \to O(n)$, $A(\phi) = (\phi(p), (d\phi)_p(e_1), \ldots, (d\phi)_p(e_n))$. Prove que A é injetiva.

   (c) Suponha, por simplicidade, G grupo de Lie compacto e A uma imersão. Conclua que a dimensão de G é, no máximo $n(n+1)/2$, e se $\dim(G) = n(n+1)/2$, então M tem curvaturas seccionais constantes.

2. Mostre que uma variedade difeomorfa a $\mathbb{R}P^n \times S^3$ não admite metricas com curvaturas seccionais positivas.(Lembre que o produto de duas variedades é orientavel se e somente se ambas são orientaveis).

3. Seja M ume variedade riemanniana completa e $p \in M$. Um *raio* por p é uma geodésica $\gamma : [0, \infty) \to M$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma|[0, t]$ é minimal $\forall t \in [0, \infty)$. Mostre que, se M é não compacta, então, para cada ponto existe um raio passando por aquele ponto.

4. Considere o parabolóide $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$, e a curva $\gamma(t) = (t, 0, t^2)$. Assuma que, reparametrizada por comprimento de arco, γ é uma geodesica.

   (a) Mostre que M é completa.

   (b) Mostre que $\gamma|[0, \infty)$ (reparametrizada por comprimento de arco) é um raio. (use o exercicio anterior)

   (c) γ (reparametrizada por comprimento de arco) não é uma reta, i.e., não minimiza a distancia entre quaisquer dois pontos. (*estime* o comprimento de $\gamma|[-t_0, t_0]$ e compare com o comprimento do círculo em M. $z = t_0^2$)

   (d) Suponha conhecido que a curvatura k de M é positiva. Mostre que $\inf\{k(p) : p \in M\} = 0$. (não faça contas!)

DOUTORADO EM MATEMÁTICA
1º EXAME DE QUALIFICAÇÃO
Sub-área: ÁLGEBRA (Álgebra Comutativa)
(02/08/00)

Escolha e resolva apenas 4 questões.

1ª Questão:
Seja A um anel tal que todo A-módulo é plano. Prove que:
a) todo ideal I de A é idempotente (isto é: $I^2 = I$),
b) para todo $x \in A$, existe $a \in A$ tal que $x = ax^2$ e ax é um elemento idempotente de A,
c) todo ideal primo de A é maximal (sugestão: use b)),
d) todo ideal primário de A é maximal (sugestão: use b)).

2ª Questão:
Sejam A um anel, I um ideal decomponível de A e $\wp$ um elemento maximal no conjunto dos ideais $(I : a)$, com $a \in A$ e $a \notin I$. Prove que:
a) $\wp = (I : ax)$, para todo $x \in A$ tal que $ax \notin I$.
b) $\wp$ é um ideal primo.
c) $\wp$ é um ideal primo de I.

3ª Questão:
a) Seja A um subanel de um anel B tal que $B \backslash A$ é um subconjunto multiplicativamente fechado de B. Prove que A é integralmente fechado em B.
b) Sejam A um domínio de integridade e K seu corpo de frações. Dizemos que $x \in K$ é *quase integral* sobre A se existe $0 \neq a \in A$ tal que $ax^n \in A$, para todo $n > 0$. Prove que:
b_1) todo elemento de K integral sobre A é quase integral sobre A,
b_2) se A é noetheriano então vale a recíproca.
c) Seja A um domínio integralmente fechado e K seu corpo de frações. Seja $f(X) \in A[X]$ um polinômio mônico. Prove que se $f(X)$ é redutível em $K[X]$ então $f(X)$ é redutível em $A[X]$. (Sugestão: considere um fator mônico $g(X) \in K[X]$ de $f(X)$ e uma extensão finita L de K (que sempre existe!) tal que $g(X)$ é um produto de fatores lineares em $L[X]$. Como são os coeficientes de $g(X)$?)

4ª Questão:
Seja A um anel.
a) Todo módulo finitamente gerado é noetheriano?
b) Se $A[X]$ é noetheriano então A é noetheriano?
c) Se $A_\wp$ é noetheriano, para todo $\wp \in Spec(A)$, então A é noetheriano?

5ª Questão:
Sejam K um corpo e A uma K-álgebra finitamente gerada. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
i) A é artiniana.
ii) A é uma K-álgebra finita.

PRIMEIRO EXAME DE QUALIFICAÇÃO
TEORIA DE NÚMEROS
02/08/2000

1) Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras e falsas, justificando sua resposta.

(i) $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ é integralmente fechado.

(ii) 13 não é um quadrado módulo 31.

(iii) Seja S uma extensão inteira de um anel R (R é subanel de S e todo elemento de S é inteiro sobre R). Sejam $P_1 \subset P_2$ dois ideais primos de S. Se $P_1 \cap R = P_2 \cap R$, então $P_1 = P_2$.

(iv) Seja M uma matriz $n \times n$ com coeficientes inteiros e tal que $|\text{determinante de } M| \geq 2$. As colunas de M geram $\mathbb{Z}^n$ como $\mathbb{Z}$–módulo.

(v) Seja F um corpo de números e $\mathcal{O}$ o anel de inteiros algébricos (F é extensão finita de $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{O}$ é o fecho inteiro de $\mathbb{Z}$ em F).

Se $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{O}$ e $d =$ discriminante de$(x_1, \ldots, x_n)$ é livre de quadrados, então $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma $\mathbb{Z}$–base livre de $\mathcal{O}$

2) Seja R um domínio. Demonstre as afirmações abaixo:

(i) $R[X]$ é um domínio de Dedekind se e somente R é um corpo.

(ii) Seja F uma extensão quadrática de $\mathbb{Q}$ tal que o grupo das unidades do anel de inteiros é infinito. Então $F \subset \mathbb{R}$.

3) Seja F um corpo de números e $\mathcal{O}$ o anel de inteiros algébricos. Demonstre que:

(i) Todo ideal não nulo de $\mathcal{O}$ contém um número natural diferente de zero.

(ii) Se $[F : \mathbb{Q}] = p$ é um número primo, então $\mathbb{Z}$ é o único subanel de F estritamente contido em $\mathcal{O}$ que é integralmente fechado.

(iii) Se os ideais primos de $\mathcal{O}$ são principais então a ordem do grupo de classes de F é 1.

(iv) Se $\mathcal{O}$ for um domínio de ideais principais, então é também um domínio fatorial. principal.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO
INTRODUÇÃO Á HOMOLOGIA

Agosto de 2000

1. Seja $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, e $G = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega^7 = 1\}$ o grupo das raizes setimas da unidade. Considere a ação $G \times S^3 \to S^3$, $\omega(z_1, z_2) = (\omega z_1, \omega z_2)$.

   (a) Mostre que a ação é propriamante descontinua e, portanto, a aplicação quociente $p : S^3 \to S^3/G$, é um revestimento.

   (b) Determine o grupo das transformações do revestimento.

   (c) Calcule o grupo fundamental do quociente S^3/G.

   (d) Mostre que qualquer função continua de S^3/G em $S^1 \times S^1$ é homotópica a uma constante.

2. Considere o plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$.

   (a) Calcule o grupo fondamental de $\mathbb{R}P^2$

   (b) Supondo conhecido que $\mathbb{R}P^2$ é uma pseudo variedade não orientável, calcule a homologia com coeficientes inteiros de $\mathbb{R}P^2$.

   (c) Usando o teorema dos coeficientes universais, mostre que $\mathbb{R}P^2$ tem a mesma homologia, com coeficientes reais, de um ponto.

3. Seja X um complexo celular finito, $f : X \to X$ uma função continua e $H_k(X, \mathbb{R})$ o k-ésimo grupo de homologia com *coeficientes reais*. Seja $L_k(f)$ o traço da função induzida entre os grupos de homologia k-dimensionais e $L(f) = \sum_0^\infty (-1)^k L_k(f)$ o número de Lefshetz de f. Lembramos que o teorema de Lefshetz garante que se f não tem pontos fixos, então $L(f) = 0$.

   (a) Mostre que toda função continua $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ tem ponto fixo.

   (b) Mostre que se $f : S^1 \to S^1$ não tem pontos fixos, então f é homotópica a identidade.

   (c) O que pode se dizer, em geral para funções $f : S^n \to S^n$ sem pontos fixos?

GABARITO:

1.a G atua sem pontos fixos, é finito e S^3 é Hausdorff. Portanto a ação é propriamente discontinua. (Vão tentar fazer diretamente, se a ideia é certa está bom)

1.b $\mathrm{Aut}(p) = G$ pois todo elemnto de G induz uma trasformação de revestimento e uma qualquer trasformação tem que coincidir em um ponto (e portanto em todos os pontos) com uma trasformação de G.

1.c Sendo S^3 simplesmente conexa, o grupo fundamental do quociente é o grupo das trasformações de revestimento, i.e. G.

1.d O único homomorfismo de G em $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \pi_1(S^1 \times S^1)$ é o homomorfismo trivial. Portanto f levanta a uma aplicação $\tilde{f} : S^3/G \to \mathbb{R}^2$ (revestimento universal de $S^1 \times S^1$). Uma homotopia entre $\tilde{f}$ e uma constante projeta em uma homotopia entre f e uma constante.

2.a $\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$, portanto como em 1.c, o grupo fundamental é $\mathbb{Z}_2$.

2.b $H_0 = \mathbb{Z}$ pela conexão por arcos. $H_1 = \mathbb{Z}_2$ por Hurewitz, $H_2 = 0$ pois é não orientavel.

2.c $Tor(\mathbb{R}, G) = 0$ para qualquer grupo G. Portanto $H_k(X, \mathbb{R}) = H_k(X, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}$. Agora $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{R} = 0$ e, portanto, ...

3.a Se X ´conexo por arcos toda função $f : X \to X$, induz identidade em $H_0 = \mathbb{R}$. Portanto, $L(f) = 1$.

3.b Em H_1 a aplicação induzida por f é multilicação pelo grau. Portanto $L(f) = 1 - dg(f) = 0$ se e somente si $dg(f) = 1$, i.e. f é homotopica a identidade.

3.c Se n é impar vale o argumanto anterior. Se n é par $L(f) = 0$ implica $dg(f) = -1$, i.e. f homotópica a aplicação antipoda.