EXAME DE QUALIFICAÇÃO - MESTRADO EM MATEMÁTICA
ANÁLISE REAL

DATA: 04/08/2000

Justifique suas respostas

1.5 I- Mostre que existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não são Lebesgue mensuráveis.

II- Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justifique sua resposta:

0.5 a) Toda função $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ é Lebesgue mensuravel.

0.5 b) Se $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ é talque $f^{-1}((r, +\infty])$ é um conjunto Lebesgue mensuravel para cada $r \in \mathbb{Q}$, então f é Lebesgue mensuravel.

0.5 c) Sejam $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (partes de $\mathbb{N}$). Defina $\mu(E) = 0$ se E é finito, e $\mu(E) = +\infty$ se E é infinito. Então, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida.

1.0 d) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ é uma seqüência de funções mensuraveis, então

$$\int_X (\liminf\ f_n)\, d\mu \leqq \liminf \int_X f_n\, d\mu.$$

1.0 e) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Se $f : X \to [0, +\infty]$ é mensuravel e $\int_X f d\mu < +\infty$, então $\mu(\{x \in X | f(x) = +\infty\}) = 0$, e o conjunto $N = \{x \in X | f(x) > 0\}$ é σ- finito.

III- a) Enuncie o Teorema da Convergência Monótona.

b) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Suponha que $f : X \to [0, +\infty]$ é mensuravel e defina

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu, \qquad \text{para} \quad E \in \mathcal{M}.$$

1.5

Mostre que λ é uma medida sobre $\mathcal{M}$ e que para $g : X \to [0, +\infty]$ mensuravel temos que $\int_X g\, d\lambda = \int_X gf\, d\mu$

2.0 IV- a) Enuncie e demostre o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

b) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty nsen(x/n)e^{-x}\, dx = 1$.

1.5 V- a) Enuncie o Teorema de Fubini.

b) Seja $I = [0, 1] \times [1, +\infty)$, e defina $F(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ se $(x, y) \in I$. Mostrar que $F \notin L^1(I, m \times m)$, onde m é a medida de Lebesgue. [Sugestão: Faça um esboço da função, $(e^{-x} - e^{-2x})/x$]

Exame de qualificação para o Mestrado

Topologia Geral 07/08/2000

1ª) a) Encontre o conjunto imagem da função real

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

b) Mostre que $\mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} f$ são homeomorfos.

2ª) Sejam X espaço métrico e $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Para cada $x \in X$, seja $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$

(a) Prove que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \quad \forall x,y \in X$

(b) Prove que a função $x \in X \to d(x, A) \in \mathbb{R}$ é contínua.

(c) Prove que $x \in \bar{A} \iff d(x,A) = 0$.

(d) Sejam F_1 e F_2 subconjuntos fechados disjuntos não-vazios de X. Mostre que existe uma função contínua $f: X \to [-1,1]$ tal que $f(x) = 1 \ \forall x \in F_1$ e $f(x) = -1 \ \forall x \in F_2$.

(e) Se X é conexo e possui mais de um ponto prove que X não é enumerável.

3ª) Sejam X e Y espaços topológicos, Y Hausdorff e $f: X \to Y$ contínua. Mostre que o gráfico de f, $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y,\ x \in X\}$ é um subconjunto fechado do espaço produto $X \times Y$.

4ª) a) Mostre que $\tau = \{\mathbb{R}\} \cup \{A \subset \mathbb{R} \mid 0 \notin A\}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

b) Em $(\mathbb{R}, \tau)$ encontre o interior de $[a, b]$.

c) $(\mathbb{R}, \tau)$ é compacto? Justifique!

5ª) Sejam X e Y espaços topológicos, H uma homotopia entre id_X e a função constante $c: X \to X$ dada por $c(x) = x_0$, $f: X \times Y \to Y$ dada por $f(x,y) = y$ e $g: Y \to X \times Y$ dada por $g(y) = (x_0, y)$

a) Exiba uma homotopia entre $g \circ f$ e $id_{X \times Y}$.

b) Mostre que $X \times Y$ e Y são homotopicamente equivalentes.

c) Conclua que se X e Y forem contráteis então $X \times Y$ também é contrátil.

Valores das questões:

1ª) 1.5

2ª) 3.0

3ª) 1.5

4ª) 2.0

5ª) 2.0

Exame Qualificação - Grupos e Anéis - 02/08/2000

Dentre as 15 questões propostas faça 10 de sua preferência.

1. Explique porque **não** existe um homomorfismo **não trivial** de um grupo de ordem 155 num grupo de ordem 28.

2. Seja $G = < a >$ um grupo (multiplicativo) cíclico de ordem 12. Determine o conjunto A, onde $A = \{a^i; 1 \leq i \leq 12, G = < a^i >\}$.

3. Sejam $G = < a >$ e $G' = < b >$ dois grupos (multiplicativos) cíclicos finitos com $\sharp(G) = m$, $\sharp(G') = n$ e n/m. Mostre que: $\varphi : G \longrightarrow G'$ definido por $\varphi(a^r) = b^r$ é um homomorfismo bem definido de grupos e que $\sharp(K) = \frac{m}{n}$, onde K é o núcleo de φ.

4. Sejam $(G, .)$ um gro finito tal que para todo $g \in G$ tem-se que $g^2 = e$ (e é o elemento neutro de G). Mostre que G é abeliano e que $\sharp(G) = 2^n$ para algum $n \geq 0$.

5. Seja $(G, .)$ um gro de ordem 175. Mostre que G é abeliano e diga quantos grupos desta ordem existem a menos de isomorfismo.

6. Mostre que o gro diedral D_4 não é isomorfo ao grupo dos quatérnios $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

7. Mostre que: se H é subgro do gro de permutações S_n e $[S_n : H] = 2$, então $H = A_n$. (**Sugestão:** mostre que $(i\,j)H = (l\ k)H, \forall (i\,j), (l\,k) \in S_n$.)

8. Sejam $(G, .)$ um gro e $H \triangleleft G$ tal que $[G : H] = p$, com p sendo um número primo. Mostre que: se $g \in G$ e $L = < g >$ com $g \notin H$, então $G = HL$.

9. Sejam $(G, .)$ um gro de ordem $n = p^r.q^s$ com p e q primos distintos e $r, s \geq 1$. Mostre que: Se a ordem de p em $\mathbb{Z}_q^*$ é estritamente maior que r então o q-subgro de Sylow de G é normal (Lembre: $\mathbb{Z}_q^*$ é o gro multiplicativo dos inteiros módulo q que são coprimos com q).

10. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \geq 2$. Considere a família dos grupos abelianos e finitamente gerados $\mathcal{F}_{(m,r)}$ dada por: $\mathcal{F}_{(m,r)} = \{G; \sharp(T(G)) = m \text{ e posto}(G) = r\}$. Encontre condições necessárias e suficientes sobre m para que quaisquer dois grupos em $\mathcal{F}_{(m,r)}$ sejam isomorfos (lembre que $T(G)$ é o subgro de torsão de G).

Nestas últimas 5 questões todos os anéis considerados são comutativos com identidade.

11. Seja **A** um anel que satisfaz: $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}$ é finito qualquer que seja o ideal **não nulo I** de A. Mostre que: Todo ideal primo **não nulo** de A é maximal.

12. Seja $A = K[X, Y, Z]$ o anel de polinômios a 3 variáveis sobre um corpo K. Mostre que: $Z^5 + Z^2X^2 - Z^2Y^2 + X^2 + XY$ é irredutível em A.

13. Seja $D = \mathbb{Z}[i]$ o anel de Gauss. Tome $I = \alpha D$, onde $\alpha = a+bi$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a^2+b^2 = 9.5.13$. Determine os possíveis ideais primos $\wp$ de D que contém I e diga quais entre eles certamente contém I.

14. Sejam D um domínio e I um ideal não nulo de D. Mostre que:
Se $I \neq D$ e D é principal então existe apenas um número finito de ideais maximais de D que contém I. Pergunta-se: Tal resultado seria verdadeiro se nas hipóteses trocarmos principal por fatorial.

15. Sejam $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ os corpos dos racionais e dos reais. Considere $\varphi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ o homomorfismo de anéis definido por $\varphi(f(X)) = f(\sqrt[3]{2})$. Mostre que: Se $K = Ker(\varphi)$ então $K = (X^2 - 2).\mathbb{Q}[X]$, o anel quociente $\frac{\mathbb{Q}[X]}{K}$ é isomorfo a $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ e $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ é corpo.

BOA SORTE

Exame de Qualificação - Agosto 2000

Equações Diferenciais Parciais

Nome ____

Observação: Cada vez que você usar um teorema para resolver o exercício, escreva o enunciado do mesmo.

Questões

(1) Resolva o problema

$$\begin{cases} 2y\,u_x + u_y = 2xy\,u \\ u(x,0) = x \quad , \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(2) Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad , \quad t>0 \ , \ 0<x<\ell \\ u(t,0) = 0 = u_x(t,\ell) + \gamma u(t,\ell) \ , \quad t \geq 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \ , \quad 0 \leq x \leq \ell \ ; \ \gamma \in \mathbb{R} \text{ e } \varphi \text{ é conhecida.} \end{cases}$$

a) Procure soluções da forma $u(t,x) = X(x)T(t)$ e mostre que
$$\begin{cases} -X'' = \lambda X \\ X(0) = 0 = X'(\ell) + \gamma X(\ell) \\ T' + \lambda \alpha^2 T = 0 \end{cases}$$

b) Mostre que os autovalores λ são estritamente positivos e satisfazem

(*) $\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,\ell) + \gamma \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0$

c) Mostre graficamente que existe um conjunto enumerável de soluções positivas de (*) e que se $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ são os autovalores, então $\lambda_n \to \infty$, quando $n \to \infty$.

d) Encontre a solução $u_n(t,x)$ correspondente ao autovalor λ_n

(3) Considere a equação da onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ com condições iniciais $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$.

Suponha que f e g tenham suporte compacto.

Mostre que a solução $u(x,t)$ tem suporte compacto em x para cada t fixo.

④ Seja Ω convexo e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

1,5 satisfaz $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \ g \geq 0. \end{cases}$

Mostre que se $g > 0$ em alguma parte de $\partial\Omega$ então $u > 0$ em Ω.

1,5

⑤ Seja $u(x,y)$ a unica função harmônica no domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ que satisfaz $u|_{\partial\Omega} = h(x,y)$

Seja w qualquer função em D satisfazendo mesma condição de fronteira.

Defina $E(f) = \frac{1}{2}\int_D |\nabla f|^2 dx$.

Mostre que $E(w) \geq E(u)$

Sugestão: chame $v = u - w$ e use identidade de Green.

1,5

⑥ Use o método de energia para mostrar que o seguinte problema de difusão tem no maximo uma solução.

$$\begin{aligned} u_t - k u_{xx} &= f(x,t), \quad t>0,\ 0<x<\ell \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \\ u(0,t) &= g(t), \quad t \geq 0 \\ u(\ell,t) &= h(t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Sugestão: Considere $w = u_1 - u_2$, multiplique a equação para w por w e integre adiquadamente.