I. Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $Gama(2, \theta)$, isto é da distribuição

$$f(x|\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0$$

[10] a. Encontre uma estatística suficiente e completa.

[10] b. Mostre a inexistência ou encontre a região crítica de tamanho α do teste uniformemente mais poderoso para as hipóteses:

$$H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_a : \theta > 1$$

[10] c. Mostre a inexistência ou encontre a região crítica de tamanho α do teste uniformemente mais poderoso para as hipóteses:

$$H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_a : \theta \neq 1$$

[10] d. Para n = 30 e $\overline{x} = 2,4$ dê o valor-p de um dos testes assintóticos: razão da verossimilhança generalizada, Wald ou escore para as hipóteses dadas no ítem anterior.

II. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição uniforme $U(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$ com $\alpha \in \Re$ e $\beta > 0$.

[10] a. Obtenha os estimadores de máxima verossimilhança e pelo método dos momentos de β quando α é conhecido.

[10] b. Para β conhecido, obtenha o estimador de máxima verossimilhança para α e mostre que $T(X_1, \cdots, X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ é uma estatística suficiente para α.

[10] c. Para $\beta = 1/2$, mostre que $(X_{(1)}, X_{(n)})$ não é completa para α. Observe que $E(X_{(1)}) = \alpha (n+1)^{-1}$ e $E(X_{(n)}) = \alpha n/(n+1)$.

[10] d. Se $\alpha = \beta$ encontre um estimador não viciado uniformemente de mínima variância de β.

III.1. É realizado um experimento para comparar 2 tipos de drogas no tratamento de certa doença. A droga A é ministrado em n_a pacientes e a droga B em n_b pacientes. Os resultados podem ser considerados como sendo duas amostras aleatórias independentes de duas populações exponenciais.

[12] a. Encontre um intervalo de confiança 90% exato para a razão entre os tempos médios de cura dos dois tratamentos.

[14] b. Encontre um intervalo de confiança 90% assintótico para a diferença entre os tempos médios de cura dos dois tratamentos. Comente se este intervalo continuaria com coeficiente aproximadamente 90% caso a distribuição fosse normal ou Weibull.

[14] c. Utilize os intervalos de confiança anteriores para mostrar como testar as hipóteses

$$H_0 : \theta_a = \theta_b \quad vs \quad H_a : \theta_a \neq \theta_b$$

ao nível de significância 0,10, onde θ_a e θ_b são os tempos médios de cura dos tratamentos A e B, respectivamente. Mostre também como calcular o valor-p para um dado resultado amostral.

III.2. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n distribuição

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}, \; x \in \Re, \; \theta > 0.$$

[12] a. Obtenha o teste uniformemente mais poderoso de nível de significância α para as hipóteses:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_a : \theta > \theta_0$$

especificando a sua região crítica.

[15] b. Obtenha um intervalo de confiança com coeficiente de confiança exato 95% para o tamanho da amostra $n = 40$.

[13] c. Obtenha um teste de nível de significância α para as hipóteses:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_a : \theta \neq \theta_0$$

IV.1. Considere uma amostra aleatória de tamanho 1 de uma Uniforme $U(0,\theta)$ com distribuição à priori dada por $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta} I_{(0,\infty)}(\theta)$.

[7] a. Mostre que a distribuição à posteriori de θ é dada por $\pi(\theta|x) = e^{-(\theta-x)} I_{(x,\infty)}(\theta)$.

[8] b. Dê o intervalo de credibilidade 90% de mais alta densidade.

[10] c. Encontre o estimador de Bayes considerando a perda quadrática.

[15] d. Considere agora uma perda do tipo 0-1 para as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \theta \leq 1 \quad vs \quad H_a : \theta > 1$$

e a função de decisão que rejeita a hipótese nula quando $x > 3/4$. Dê a função risco e o risco de Bayes desta função de decisão.

IV.2. Considere o modelo de regressão dado por

$$y_t = \alpha x_t^{\beta} + \epsilon_t, \quad t = 1, \cdots, n,$$

onde $\epsilon_{t's}$ tem distribuição normal independentes com média zero e variância igual a um, e x_t são valores fixos conhecidos. Estamos interessados em testar a hipótese nula de que não é necessário realizar transformações, isto é, que $\beta = 1$.

[15] a. Mostre como calcular o valor-p do teste da razão de verossimilhança utilizando a dsitribuição assintótica.

[15] b. Mostre como calcular o valor-p do teste de Wald utilizando a distribuição assintótica.

[10] c. Mostre como calcular o valor-p do teste de escore de Rao (Multiplicador de Lagrange) utilizando a distribuição assintótica.

Nota: Não precisa mostrar que a solução das equações de verossimilhança é ponto de máximo.
$\frac{\partial}{\partial\beta} x_t^{\beta} = (log x_t) x_t^{\beta}$.

V.1.

[10] a. Enuncie os teoremas de Rao-Blackwell e de Lehmann-Scheffé

[10] b. Faça uma discussão suscinta sobre a diferença entre os 2 teoremas.

[20] c. Prove um dos dois teoremas enunciados no ítem (a).

V.2. Seja $X_1, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias contínuas independentes com funções de densidades $f_i(x|\theta)$, $i = 1, \cdots, n$, onde o parâmetro θ é comum mas as densidades não são necessariamente iguais. Seja $T(X_1, \cdots, X_n)$ um estimador não viciado de $g(\theta)$, com $g(.)$ diferenciável. Suponha que as distribuições satisfazem as condições de regularidade.

[25] a. Mostre que

$$Var(T(X_1, \cdots, X_n)) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{\sum_{i=1}^n Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f_i(X_i|\theta)\right)}$$

[15] b. Considere que X_i tenha distribuição de Poisson com média θz_i, com os valores de z_i, $i = 1, \cdots, n$ conhecidos. Obtenha o limite inferior de Cramer-Rao para os estimadores não viciados de θ.