Nome:

R.A.:

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

Exame de Inferência, Data: 09/01/2020

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **O exame tem duração de quatro horas.**
- **Numere e identifique cada folha utilizada.**
- **Não é permitido consulta.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Resolva (4) das (5) questões propostas. Indique na seguinte tabela quais questões foram escolhidas.**

Questão	1	2	3	4	5

- **Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha. Use somente um lado de cada folha.**
- **Escreva de maneira clara e organizada.**
- **As questões têm a mesma pontuação.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique suas respostas.**
- **Todos os resultados vistos em classe ou desenvolvidos nas listas de exercícios podem ser utilizados, a menos que se mencione o contrário.**
- **Resolva o teste, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **A nota será equivalente à soma dos pontos obtidos nas questões escolhidas.**

Tranquilidade e faça uma excelente Prova!!

Questões

1. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{gama}(\alpha, \lambda)$, ou seja,

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda)', \mathcal{E}(X^k) = \frac{1}{\lambda^k}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \forall k > 0$$

   a) Para α conhecido, determine o LICR de um estimador não viesado de λ^3 (0,8 pontos).

   b) Para α conhecido, encontre o ENVUM para $\tau(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^3}$ (0,8 pontos).

   c) Para α conhecido e supondo que $\lambda \sim \exp(a)$ $(f(\lambda) = ae^{-a\lambda})$ (a conhecido), obtenha o estimador de Bayes para λ, sob perda quadrática (0,9 pontos).

2. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{binomial}(m, \theta)$, com $m \in \{1, 2, ...\}$ conhecido e $\theta \in (0, 1)$ desconhecido, ou seja

$$f_X(x;\theta) = \binom{m}{x} \theta^x (1-\theta)^{1-x} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,m\}}(x)$$

   Responda os itens abaixo:

   a) Encontre o ENVUM de θ (0,9 pontos).

   b) Encontre a família conjugada de prioris, a respectiva distribuição a posteriori e o estimador de Bayes sob a perda $L(d, \theta) = \dfrac{d}{\theta} - 1 - \ln\left(\dfrac{d}{\theta}\right)$ (0,7 pontos).

   c) Considerando sua versão truncada no zero, ou seja

$$f(y;\theta) = \frac{1}{1-(1-\theta)^m} \binom{m}{y} \theta^y (1-\theta)^{m-y} \mathbb{1}_{\{1,2,3,\ldots\}}(y),$$

   e n = 1, encontre a distribuição assintótica do respectivo estimador de máxima verossimilhança. Sugestão: Use o fato de que $\mathcal{E}(X) = m\theta$ (0,9 pontos)

3. Considere uma amostra aleatória de tamanho n da seguinte distribuição (em que $a < \theta$ é conhecido e $\theta \in (-\infty, \infty)$):

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta - a} \mathbb{1}_{(a,\theta)}(x)$$

Responda os itens abaixo:

a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ (0,9 pontos).

b) Encontre um intervalo de confiança com coeficiente de confiança $\gamma \in (0,1)$, para θ (0,8 pontos).

c) Encontre o teste UMP para testar as hipóteses $H_0 : \theta > \theta_0$ vs $H_1 : \theta \leq \theta_0$, sob um tamanho do teste de $\alpha \in (0,1)$, em que $\theta_0 \in (-\infty, \infty)$ conhecido (0,8 pontos).

4. Considere uma amostra de tamanho n da distribuição $N(\theta, \theta^2)$, em que $\theta > 0$. Para este modelo, cS é um estimador não viciado para θ, em que:

$$c = \frac{\sqrt{n-1}\Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{2}\Gamma(n/2)} \text{ e } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Responda os itens abaixo:

a) Mostre que, $\forall a$, o estimador $T_a = a\overline{X} + (1-a)cS$ é não viciado para θ (0,6 pontos).

b) Obtenha o valor de a de sorte a produzir um estimador T_a com a menor variância possível (1,1 pontos).

c) A estatística $(\overline{X}, S^2)'$ é suficiente e completa para θ (0,8 ponto)?

5. Considere o modelo de regressão linear definido por

$$Y_i = 1 + \beta x_i^2 + e_i, \quad i = 1, ..., n,$$

em que $e_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), \;\; i = 1, ..., n$ e as variáveis $x_1, ..., x_n$ são (quantidades) conhecidas.

a) Encontre uma estatística suficiente para $(\beta, \sigma^2)'$(0,5 pontos).

b) Encontre o ENVUM para β (1,0 ponto).

c) Otenha a estatistica Escore de Rao, para testar $H_0 : \beta = 1$ contra $H_1 : \beta \neq 1$ e mostre e obtenha sua distribuição exata, sob H_0. Assuma que que σ^2 é conhecido (1,0 ponto).