Exame de Qualificação - Doutorado - 2013

Importante, ler com cuidado: Todo tipo de documento, livro etc é proibido. A solução das questões é de caráter individual e, portanto, consultas, conversas, troca de idéias ou materiais constituem violação desse caráter. Para recebimento de crédito total, desenvolva suas respostas. A solução de cada questão deve ser feita EM **UMA FOLHA** SEPARADA, **com os itens em ordem**. Boa sorte.

Primeira Questão Considere a seguinte seqüência de conjuntos (onde $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$)

$$A_n = \left\{ \frac{m}{n^2} : m \in \mathbf{N} \right\} \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Encontre $\liminf_{n\to\infty} A_n$ e $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

Segunda Questão Seja $p > 0$ um parâmetro. Dê exemplos de seqüências de v.a.'s tais que

(a) X_n converge para 0 em L^p mas não converge em L^q para $q > p$;

(b) X_n converge para 0 em L^q para $q < p$ mas não converge em L^p.

Terceira Questão Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma seqüência de v.a.'s independentes, tal que X_n é Uniforme no intervalo $[\sqrt{n}, \sqrt{n} + n^\beta]$, onde $\beta > 0$ é um parâmetro. O que pode ser dito sobre a validade das condições de Lindeberg e de Lyapunov?

Quarta Questão Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma seqüência de v.a.'s independentes com respectivas funções de densidades $f_i(x|\theta)$, $i = 1, \cdots, n$, de forma que $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ seja comum a todas as fdp's mas as densidades não são necessariamente iguais. Seja $T(X_1, \cdots, X_n)$ um estimador não viciado de $g(\theta)$.

(a) Quais são as condições de regularidade para a obtenção do LICR? Justifique.

(b) Assumindo que as condições de regularidade sejam satisfeitas, mostre que

$$Var(T(X_1, \cdots, X_n)) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{\sum_{i=1}^{n} Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f_i(X_i|\theta)\right)}$$

(c) Considere que X_i tenha distribuição de Poisson com média θz_i, com os valores de z_i conhecidos, $i = 1, \ldots, n$. Obtenha o Limite Inferior de Cramer-Rao para os estimadores não viciados de θ.

Quinta Questão Seja $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ uma seqüência i.i.d. de normais bivariadas $N_2(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, isto é, com esperanças nulas e variâncias σ_1^2 e σ_2^2 e coeficiente de correlação ρ. Considere o teste das hipóteses $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho \neq 0$.

(a) Mostre que o teste de razão de verossimilhanças pode ser expresso em função de $|r|$, em que

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{j=1}^{n} Y_j^2}}.$$

(b) Mostre que, sob H_0, r^2 tem uma distribuição beta com parâmetros $1/2$ e $(n-1)/2$.

Sexta Questão

(a) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com f.d.p. f e f.d.a F. Mostre que, dado $X_{(i)} = p_i$, os $(i-1)$ valores a sua esquerda e os $(n-i)$ valores a sua direita se comportam independentemente com respectivas densidades $f(x)/F(p_i)$ e $f(x)/(1-F(p_i))$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Use esse resultado para encontrar uma estatística suficiente para θ no caso $U(0, \theta)$.

(b) Sejam X_1, X_2 duas $Poisson(\lambda)$ independentes. Mostre que $X_1 + \alpha X_2$ não é uma estatística suficiente para λ, qualquer que seja o inteiro $\alpha > 1$.