IMECC/Unicamp
Exame de Qualificação ao Mestrado
MM720 - Análise no $\mathbb{R}^n$
01 de agosto de 2022

RA: ____________ **Nome:** ____

Instruções:

- Esta prova tem 3h de duração e vale 10 pontos.
- Você deve escolher no máximo 5 questões dentre as abaixo para fazer. Cada questão vale 2 pontos.

****

Q1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(0,0) = 0$ e

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Mostre que esta função é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

(b) A função f é de classe C^2? Justifique sua resposta.

Q2. Prove que não existe um difeomorfismo de classe C^1 de um aberto de $\mathbb{R}^n$ num aberto de $\mathbb{R}^m$ se $m < n$.

Q3. (a) Mostre que o conjunto das matrizes invertíveis $GL_n(\mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Considere a função $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dada por $\phi(A) = A^{-1}$. Mostre que ϕ é diferenciável e, para $n = 2$, calcule $\phi'(A)(B)$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q4. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} xy + z^2 = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$

(a) Esboce o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a cada uma das equações do sistema. Se quiser, pode fazer isto restrito a um dos planos coordenados. Use seu esboço para estudar se o sistema tem solução. (Justifique!)

(b) Use o Teorema da Função Implícita para mostrar que o sistema pode ser resolvido, digamos com $x = \phi(z)$ e $y = \psi(z)$, na vizinhança de (1,2,1).

(c) Encontre dx/dz no ponto $(1, 2, 1)$.

Q5. Dados $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $k \in \mathbb{R}$, seja H o hiperplano afim em $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \langle x, a\rangle = k\}$. Para $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ arbitrário, encontre o ponto $q \in H$ que está mais próximo de p.

Q6. O que é uma partição da unidade em $\mathbb{R}^n$ de classe C^∞? Dê um exemplo (pode ser numa subvariedade).

Q7. (a) Enuncie o Teorema de Stokes para uma variedade suave k-dimensional orientada e compacta $M \subset \mathbb{R}^n$ com bordo ∂M e uma $(k-1)$-forma ω definida num conjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$ com $M \subset U$, e dê um exemplo de como utilizá-lo com $n = 3$ e $k = 2$ (escolha M e ω).

(b) É verdade que toda forma fechada é exata? Justifique.

Boa prova!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação - Topologia Geral.

NOME:____ **RA:**_______________**.**

1^a Questão. Enuncie e demonstre o Teorema de Tychonoff.

2^a Questão. Mostre que um espaço X é Hausdorff se, e só se, a diagonal

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X, x \in X\}$$

é um conjunto fechado de $X \times X$.

3^a Questão. Se X é um espaço topológico compacto e Y é um espaço topológico de Hausdorff então toda função $f : X \to Y$ contínua e bijetora é um homeomorfismo.

4^a Questão. Seja $A \subset X$ e um mapa contínuo $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$ (isto é, r é uma retração). Mostrar que r é um mapa quociente.

5^a Questão. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia euclidiana usual $\mathcal{T}_E$ e a famlia de conjuntos

$$\mathcal{B} = \{(a, b] \subset \mathbb{R},\ a < b\}.$$

Mostrar que $\mathcal{B}$ é a base de uma topologia $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{R}$ e que a identidade $I(x) = x$ como mapa $I : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_E)$ é contínua e mas não é homeomorfismo.

6^a Questão. Determine se é verdadeiro ou falso. Justifique.

a) Sejam X e Y dois espaços topológicos não vazios com Y sendo Hausdorff e $f : X \to Y$ contínua. Se X é conexo então $f(X)$ é conexo.

b) $\pi_1(S^n)$ é trivial para todo $n \geq 1$.

c) S^1 é homeomorfo a $[0, 1)$.

d) Para todo espaço métrico o fecho da bola aberta é igual ao fecho da bola fechada.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!