IMECC/Unicamp
Exame de Qualificação ao Doutorado
MM425 - Análise Funcional I
1º de agosto de 2022

RA: ____________ **Nome:** ____

Instruções:

- Esta prova tem 3h de duração e vale 10 pontos.
- Você deve escolher no máximo 5 questões dentre as abaixo para fazer. Cada questão vale 2 pontos.

****

Q1. Seja X um espaço normado real e f um funcional linear em X. Mostre que o hiperplano $\{x : f(x) = \alpha\}$ é fechado se, e somente se, $f \in X^*$ (isto é, f é contínuo).

Q2. Mostre as seguintes aplicações do Teorema de Hahn-Banach:

(a) Se Y é um subespaço de um espaço normado X, então

$$\overline{Y} = \bigcap \{\mathrm{Ker}(f) : f \in X^*, Y \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$

(b) Denote por $\mathscr{B}(X,Y)$ o espaço das aplicações lineares limitadas entre entre dois espaços normados. Mostre que se $\mathscr{B}(X,Y)$ é completo, então Y é completo.

Q3. Um espaço vetorial X é dito *uniformemente convexo* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1-\delta$, sempre que $\|x-y\| > \varepsilon$, e $\|x\| = \|y\| = 1$. Se H é um espaço com produto interno real, mostre que H é uniformemente convexo.

Q4. Mostre que todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Q5. Suponha que H é um espaço de Hilbert. Mostre que:

(a) Se H é separável, cada conjunto ortonormal é contável.

(b) Se H contém uma sequência ortonormal total M (isto é, $\overline{\mathrm{span}\, M} = H$), então H é separável.

Q6. Seja T um operador linear definido em um espaço de Hilbert H satisfazendo

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

para todo $x, y \in H$. Mostre que T é limitado. (**Dica:** Usar o princípio da limitação uniforme.)

Q7. Seja Y o subespaço de $C[0,1]$ consistindo das funções reais em $[0,1]$ com derivadas contínuas. Mostre que o operador $T : Y \to X$ dado por $Tx = x'$ é fechado, mas não é limitado.

Boa prova!

1	2	3	4	5	$\sum$

MM427 - Exame de Qualificação– 05/08/2022

Nome:______________________________ **Turma:** **RA:**________

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas! Todos os anéis considerandos nesta prova são comutativos com $1 \neq 0$.

1) Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) (10 pt.) Seja A um anel . Se m um ideal maximal de A, então $m[x]$ é um ideal maximal de $A[x]$.

   (b) (10 pt.) A dimensão de Krull de um domínio neotheriano é sempre finita.

   (c) (10 pt.) Seja A um anel com unico ideal primo p. Então A é neotheriano.

   (d) (10 pt.) Sejam A um anel e $0 \to M \to N \to T \to 0$ uma sequencia exata de A-módulos. Se M e T são A-módulos finitamente gerados, então N é finitamente gerado.

2) (10 pt.) Seja (A, m) um anel artiniano e local tal que m é principal. Mostre que cada ideal de A é principal.

3) (15 pt.) Seja M um módulo finitamente gerado sobre um domínio de Dedekind. Mostre M é plano se e somente se é livre de torção.

4) (20 pt.) Seja A um subanel de B tal que B é integral sobre A. Mostre

   (a) $\dim(A) = \dim(B)$.

   (b) A é um corpo se e somente se B é um corpo.

5) (15 pt.) Sejam k um corpo e $\phi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo entre k- algebras finitamente geradas. Se m é um ideal maximal de B, mostre que $\phi^{-1}(m)$ é um ideal maximal de A.

Boa Prova!

IMECC/Unicamp
Exame de Qualificação ao Doutorado
MM591 - Análise de Fourier e Distribuições
1º de agosto de 2022

RA: __________ **Nome:** ____

Instruções:

- Esta prova tem 3h de duração e vale 10 pontos.
- Você deve escolher 5 questões dentre as abaixo para fazer. Cada questão vale 2 pontos.

****

Q1.

(a) Mostre que a distribuição δ não pode ser representada por uma função localmente integrável.

(b) Econtre a derivada de $\log |x|$ no sentido de distribuições.

Q2. Uma distribuição u é chamada de *homogênea* de grau λ se $u \circ S_r = r^\lambda u$ para todo $r > 0$, onde $S_r(x) = rx$. Mostre que $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é homogênea de grau $-n$. Mostre que se u é homogênea de grau λ então $\partial^\alpha u$ é homogênea de grau $\lambda - |\alpha|$.

Q3. Se $u \in C^1(\mathbb{R})$ é 2π-periódica, e

$$\int_0^{2\pi} u(x)dx = 0\,,$$

mostre que então

$$\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \leqslant \int_0^{2\pi} |u'(x)|^2 dx\,.$$

Q4.

(a) Calcule a transformada de Fourier de $x \mapsto e^{ix\cdot\theta}$, onde $x, \theta \in \mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que a sequência (T_n) definida seguir converge em $\mathcal{S}'$ para δ:

$$T_n(\varphi) = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x)dx\,.$$

Q5. Calcule a transformada de Fourier de $\Phi(x) = e^{-|x|^2/2}$ em $\mathbb{R}^n$. **Dica:** Considere o PVI

$$\begin{cases} \phi'(t) + t \cdot \phi(t) = 0 \\ \phi(0) = 1 \end{cases}.$$

Q6.

(a) Mostre que se $u \in \mathcal{S}'$ é tal que $|\xi|\widehat{u}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\partial_j u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, para $j = 1, \ldots, n$. **Dica:** Usar Riemann-Lebesgue.

(b) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que f é contínua em 0 e $\mathcal{F}(f) \geqslant 0$. Mostre que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. **Dica:** Usar o Lema de Fatou.

Q7.

(a) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Mostre que $f \mapsto u * f$ é uma aplicação contínua de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Enuncie o *Teorema de Rellich*.

Boa prova!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação - Grupos de Lie.

NOME:____ **RA:**______________**.**

1^a **Questão.** Seja G um grupo topológico e H um subgrupo. A topologia quociente em G/H é Hausdorff se, e somente se, H é fechado.

2^a **Questão.** Mostre que a exponencial de matrizes $\exp : \mathfrak{u}(n) \to U(n)$ é sobrejetora.

3^a **Questão.** Seja $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Mostre que $\ker f$ é um subgrupo de Lie fechado e mostre que sua álgebra de Lie é $\ker df_e$.

4^a **Questão.** Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie (sobre $\mathbb{R}$ e $\dim < \infty$). Denote por $Aut(\mathfrak{g})$ o grupo dos automorfismos de $\mathfrak{g}$. Mostre que a álgebra de Lie de $Aut(\mathfrak{g})$ é a álgebra das derivações de $\mathfrak{g}$. Observação: Uma derivação é uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz $D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY]$.

5^a **Questão.** Verdadeiro ou Falso ? Justifique as respostas

a) Seja G um grupo solúvel e simplesmente conexo. Então a aplicação exponencial é um difeomorfismo.

b) Para qualquer grupo finito Σ, exite um grupo de Lie G tal que $\pi_1(G) = \Sigma$.

c) Se G é um grupo de Lie conexo tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ então $Z(G)$ é finito. ($Z(G)$ é o centro de G e $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é a respectiva álgebra de Lie de $Z(G)$).

d) Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ temos $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$.

6^a **Questão.** Sejam G um grupo de Lie, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $H \subset G$ um subgrupo normal e fechado. Mostre que:

1. a álgebra de Lie de H é um ideal de $\mathfrak{g}$.

2. G/H é um grupo de Lie com a estrutura diferencial quociente e sua álgebra de Lie é isomorfa à algebra quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

3. Mostre que $SL(n,\mathbb{R})$ é um subgrupo de Lie normal de $GL(n,\mathbb{R})$ e que o grupo de Lie $GL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R})$ é isomorfo a $\mathbb{R}^*$.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação - Topologia Algébrica.

NOME:____ **RA:**________________.

1^a **Questão.** Seja X um complexo CW de dimensão finita e denote por X^n o seu $n-$ésimo esqueleto. Provar que $H_n(X^n, X^{n-1})$ é um grupo abeliano livre com base em correspondência um-a-um com o número de células.

2^a **Questão.** Seja $X = S^4 \cup_\phi e^5$ com $\phi : S^4 \to S^4$ de grau 5. Calcule os grupos de homologia de X

3^a **Questão.** Seja $\phi : S^n \to S^n$ um mapa contínuo que não é uma equivalência homotópica. Mostrar que ϕ tem um ponto fixo.

4^a **Questão.** Calcule os grupos de homologia de $\mathbb{C}P^n$.

5^a **Questão.** De um exemplo de um espaço com a seguinte homologia.

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se} \quad k = 0 \text{ e } k = 5 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{se} \quad k = 4 \\ 0 & \quad \text{no outros casos.} \end{cases}$$

6^a **Questão.** Determine se é verdadeiro ou falso. Justifique.

a) Se $\pi_k(X) \simeq \pi_k(Y)$ para todo k então X é homeomorfo a Y.

b) $\pi_1(\mathbb{C}P^n) \simeq \mathbb{Z}$.

c) Seja $\pi : \tilde{X} \to X$ um recobrimento universal e $f : \mathbb{R}P^1 \to X$ um mapa. Então existe $\tilde{f} : \mathbb{R}P^1 \to \tilde{X}$ que levanta a f.

d) $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$ e $\mathbb{C}P^{n+m}$ são homeomorfos.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação - Geometria Riemanniana.

NOME:____ **RA:**_______________**.**

1^a Questão. Mostre que toda variedade homogênea é completa.

2^a Questão.Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e X um campo de Killing. Defina o tensor

$$T(u, v) = g(\nabla_u X, v),$$

e mostre que ele é antisimétrico.

3^a Questão. Calcule as geodésicas da esfera.

4^a Questão. Seja $\phi : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ um mergulho isométrico. Mostre que $M \hookrightarrow \tilde{M}$ é totalmente geodésica se, e somente se, as segundas formas fundamentais de M se anulam.

5^a Questão. Resolva a equação dos campos de Jacobi para espaços de curvatura constante em termos de um campo paralelo.

6^a Questão. Determine se é verdadeiro ou falso. Justifique.

a) O Toro admite uma métrica com curvatura positiva.

b) Dois pontos da esfera são conjugados se, e somente se, são antipodais.

c) Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional K satisfazendo $0 < a \leq K \leq b$ então a distância d entre dois pontos conjugados é maior que $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$.

d) A esfera S^3 admite uma métrica completa com curvatura seccional negativa.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!