MM 719, Álgebra Linear
Exame de Qualificação ao Mestrado

Março de 2023

1. Seja $V = M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com coeficientes reais. Considere a função traço $tr\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (recordamos que o traço de uma matriz quadrada é a soma das entradas da diagonal principal da matriz).

a) (0,8 pt) Mostrar que esta função traço é linear e que $tr(AB) = tr(BA)$ para quaisquer matrizes A e B.

b) (1,2 pt) Se $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma função linear tal que $f(AB) = f(BA)$ para quaisquer A e B, mostrar que existe número real r tal que $f(A) = r \cdot tr(A)$ para toda matriz A.

c) (1 pt) Mostrar que $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$ é uma forma bilinear simétrica no espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ e que $|tr(AB^t)| \leq \sqrt{tr(AA^t)}\sqrt{tr(BB^t)}$ para quaisquer A, $B \in M_n(\mathbb{R})$. (Aqui A^t é a transposta da matriz A.)

2. (2 pt) Seja $J \in M_n(\mathbb{C})$ um bloco de Jordan $n \times n$ correspondente ao único autovalor λ. Encontrar a forma de Jordan da matriz J^2.

3. Sejam e_1, e_2, e_3 os vetores da base canônica do espaço vetorial $\mathbb{C}^3$.

a) (0,6 pt) Dada a função

$$f(e_1) = e_1 + 4e_3, \qquad f(e_2) = 3e_2, \qquad f(e_3) = 2e_1 + 5e_3,$$

mostrar que existe uma única transformação linear $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $T(e_i) = f(e_i)$, $i = 1, 2, 3$. Escrever a matriz de T na base canônica de $\mathbb{C}^3$.

b) (0,4 pt) Mostrar que T deixa invariante o subespaço de $\mathbb{C}^3$ que é gerado pelos vetores e_1 e e_3.

c) (1 pt) Encontrar a matriz da restrição S de T no subespaço gerado por e_1 e e_3, em relação à base e_1 e e_3.

4. (2 pt) Responder **verdadeira** ou **falsa** a cada uma das afirmações abaixo. (Respostas sem a devida justificativa serão desconsideradas!)

1) Se A e B são duas matrizes complexas $n \times n$ que têm os mesmos polinômio característico e polinômio minimal, então A e B têm a mesma forma canônica de Jordan.

2) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \ldots \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ (n vezes), é isomorfo a $\mathbb{R}$.

3) Se V^* é o espaço dual do espaço vetorial V de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, então $V^* \otimes_{\mathbb{R}} \ldots \otimes_{\mathbb{R}} V^*$ (n vezes), é isomorfo a $(V \otimes_{\mathbb{R}} \ldots \otimes_{\mathbb{R}} V)^*$.

4) Se V um espaço vetorial de dimensão $n < \infty$ sobre $\mathbb{R}$ e se $P\colon V \to V$ uma transformação linear tal que $P^2 = I_n$, a matriz identidade, então $\det P = 1$.

5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e considere $S^k(V)$, o espaço dos tensores simétricos em $V^{\otimes k}$. (Recordamos que $S^k(V)$ são os elementos de $V^{\otimes k}$ que são invariantes por quaisquer permutações das k parcelas no produto tensorial.)

a) (1 pt) Se $sym\colon V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$ é dada por

$$sym(T) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma} \sigma(T),$$

onde σ percorre todas permutações de $\{1, 2, \ldots, k\}$, e $\sigma(T)$ significa que fazemos a correspondente permutação nas parcelas do tensor T, mostrar que sym é uma projeção de $V^{\otimes k}$ sobre $S^k(V)$.

b) (1 pt) Um tensor $T \in V^{\otimes k}$ é antissimétrico se $\sigma(T) = sinal(\sigma)T$, onde $sinal(\sigma)$ é o sinal da permutação σ. Denotamos por $\Lambda^k(V)$ o conjunto dos tensores antissimétricos em $V^{\otimes k}$. Mostrar que a função

$$alt\colon V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}, \text{ dada por } alt(T) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma} sinal(\sigma)\sigma(T),$$

é uma projeção de $V^{\otimes k}$ sobre $\Lambda^k(V)$.

c) (1 pt) Mostrar que $V \otimes_{\mathbb{C}} V \cong S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$, e que sym é a projeção de $V \otimes_{\mathbb{C}} V$ sobre $S^2(V)$ que é paralela ao subespaço $\Lambda^2(V)$. Podemos afirmar que alt é a projeção de $V \otimes_{\mathbb{C}} V$ sobre $\Lambda^2(V)$ que é paralela ao subespaço $S^2(V)$?

IMECC/UNICAMP
EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ANÁLISE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO
27/02/2023 - 2ª-feira - 09:00 às 12:00

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	Total:
Valor:	2	2	2	2	2	10
Nota:						

Instruções para a realização de seu Exame de Qualificação:

1. Usar na resolução dos exercícios caneta **Azul** ou **Preta** - Não desgrampear o Exame!
2. **Desliguem/Guardem** os celulares e relógios (Smart Watch);
3. Não é permitido **sair da sala de aula** durante a realização do Exame;
4. Não é permitida a utilização de folhas (A4, caderno e etc) extras.
5. É vedada a utilização de **qualquer material/dispositivo de apoio** extra.
6. Escreva suas respostas de **maneira legível** e com **argumentos objetivos e claros**.
7. Este Exame de Quaificação terá início às 09h do dia 27 de fevereiro de 2023.
   Você terá três horas para resolvê-lo.
8. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

As questões do Exame estão na próxima página.

BOA SORTE E SUCESSO A TODA(O)S!

Q1. (**pontos**) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1. Suponha que existe $\tau \in (0,1)$ tal que $\|g'(x)\| \leq \tau$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde

$$f(x) = g(x) + x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$

(a) (**1 ponto**) Mostre que

$$\langle f'(x)h, h\rangle \geq (1-\tau)\|h\|^2 \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n.$$

(b) (**1 ponto**) Mostre que

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \geq 1 - \tau.$$

Além disso, apresente um **exemplo explícito** onde o limite acima se verifica[1].

Q2. (**2 pontos**) Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável em um conjunto convexo[2] $U \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que se

$$\langle f'(x)v, v\rangle > 0 \quad \forall\ x \in U \quad \text{e} \quad \overrightarrow{0} \neq v \in \mathbb{R}^m,$$

então f é **injetiva**. Seria tal f acima descrita sempre **sobrejetiva**? Argumente ou dê contra-exemplos[3]!

Q3. (**2 pontos**) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $|f'(t)| \leq \kappa < 1 \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$. Considere $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por

$$\Phi(x,y) = (x + f(y), y + f(x)).$$

Mostre que Φ é um **difeomorfismo** (global)[4].

Q4. (**2 pontos**) Para quais valores de $\alpha \in \left(\frac{1}{n}, \infty\right)$ a seguinte integral

$$\int_1^\infty \int_{\frac{1}{2}}^\infty \cdots \int_{\frac{1}{n}}^\infty \frac{e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \cdots e^{-x_n^2}}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\alpha - \frac{1}{n}}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

é **finita** (converge)[5]? Além disso, encontre uma **cota superior** para tal valor da integral em termos de α e da dimensão n.

Q5. (**2 pontos**) Assuma que $\overrightarrow{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (para $n = 3$) é um campo vetorial C^1 com a seguinte propriedade:

$$\overrightarrow{G}(x) \cdot x > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{com} \quad \|x\| = 1.$$

Mostre que **não existe** qualquer campo vetorial $\overrightarrow{F} \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ (cujas derivadas parciais até segunda ordem de suas componentes são contínuas) tal que $\overrightarrow{G} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \mathrm{rot}(\overrightarrow{F})$. Dica: Argumente por *Reductio ad absurdum* e use Teoremas para integrais múltiplas (do Cálculo Vetorial). Justifique todas as suas afirmações.

---

[1] Procure meditar sobre um perfil linear

[2] Um subconjunto X de um espaço afim é dito ser convexo quando todo segmento de reta conectando dois pontos de X está contido em X. Matematicamente:

$$\forall x, y \in X,\ \forall t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad (1-t)\ x + t\ y \in X$$

[3] Considere a função $f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ e medite sobre as afirmações acima.

[4] Uma bijeção diferenciável, cuja inversa também é diferenciável é denominada de difeomorfismo.

[5] Procute trabalhar/majorar o integrando de sorte a recair em uma integral a qual se possa aplicar os resultados/teoremas de integrais múltiplas de maneira mais imediata.

Topologia Geral - MM 453 - Qualificação de Mestrado

Nome RA:

1	2	3	4	5	6	Total

Instruções:

- ATENÇÃO: Resolva CINCO questões desta avaliação.
- Coloque o seu RA em **TODAS** as folhas.
- Escreva de forma clara os argumentos utilizados.
- Não escreva no quadro de pontuação acima.
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.
- Indique abaixo quais questões você escolheu.

Questões escolhidas:

Problema 1:(2.0) Seja X um espaço topológico, dado $A \subset X$ definimos a fronteira de A, denotada por ∂A, pela equação:

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}.$$

a) (1.0) Mostre que $\mathrm{Int}(A)$ e ∂A são disjuntos e $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \partial A$.

b) (0.5) Mostre que $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow A$ é aberto e fechado.

c) (0.5) Mostre que U é aberto $\Leftrightarrow \partial U \cap U = \emptyset$.

Problema 2:(2.0) Sejam X e Y espaços topológicos. Seja $f : X \to Y$ uma função com Y um espaço de Hausdorff compacto. Mostre que f é contínua se, e somente se, o gráfico de f

$$G_f := \{(x, f(x)) : \ x \in X\}$$

for fechado em $X \times Y$.

Problema 3:(2.0) Mostre que se X é um espaço métrico separável então X é segundo enumerável (ou seja E_2).

Problema 4:(2.0) Seja X um espaço regular com base enumerável, mostre que X é normal.

Problema 5:(2.0)

a) Prove que todo filtro está contido em um ultrafiltro.

b) Enuncie e demonstre o Teorema de Tychonoff.

Problema 6:(2.0)

a) Seja $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento e seja B um espaço conexo. Mostre que se $p^{-1}(b_0)$ tem k elementos para algum $b_0 \in B$, então $p^{-1}(b_0)$ possui exatamente k elementos para todo $b \in B$.

b) Seja $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento, $b_0 \in B$ e $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ fixados. Denote por
$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$
a correspondência de levantamento induzida por p e com respeito aos pontos b_0 e e_0. Mostre que se E for simplesmente conexo então ϕ será bijetora.