1	2	3	4	5	$\sum$

MM427 - Exame de Qualificação – 03/03/2023

Nome:____ **RA:**______________

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas! Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos com $1 \neq 0$.

1) Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) (1 pt.) Seja A um anel não trivial e assuma que, para cada ideal primo P de A, a localização A_P é um domínio integral. Então A também é um domínio integral.

   (b) (1 pt.) A dimensão de Krull de um domínio noetheriano é sempre finita.

   (c) (1 pt.) Seja (A, m) um anel artiniano local. Se m é principal, então A é um domínio de ideais principais.

   (d) (1 pt.) Seja A um anel. Se $A^n = A^m$, então $m = n$.

2) (1.5 pt.) Seja A um anel não trivial e assuma que para cada elemento x de A, existe um numero n tal que $x^n = x$. Mostre o radical de Jacobson é igual ao nilradical.

3) (1.5 pt.) Sejam A um anel local, M e N dois A-módulos finitamente gerados tais que $M \otimes N = 0$. Então $M = 0$ ou $N = 0$.

4) (1.5 pt.) Sejam (A, m) um anel noetheriano local e $x \in m$ um elemento que não é divisor de zero. Mostre que

$$\dim \frac{A}{(x)} = \dim A - 1.$$

5) (1.5 pt.) Seja k um corpo e A um k-álgebra finitamente gerada. Se A é corpo, mostre que A é uma extensão finita de k.

Boa Prova!

MM 439, Álgebras de Lie
Exame de Qualificação ao Doutorado

Março de 2023

As álgebras de Lie são consideradas sobre o corpo dos complexos, e de dimensão finita.

1. Seja $m \geq 0$ um inteiro não negativo, e seja $V(m)$ uma representação irredutível de dimensão $m+1$ da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2$ das matrizes 2×2 de traço 0.

a) (1 pt) Se V é um $\mathfrak{sl}_2$-módulo e $V = \oplus_{i=1}^{k} V^{(i)}$ onde os $V^{(i)}$ são submódulos irredutíveis de V, mostrar que $k = \dim V_0 + \dim V_1$, onde V_i é o espaço de peso i de V.

b) (1 pt) Calcular o caráter do produto tensorial $V(m) \otimes V(n)$.

c) (1 pt) Mostrar que $V(m) \otimes V(n) \cong \oplus_{t=0}^{s} V(m+n-2t)$, onde $s = \min\{m, n\}$.

2. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples com sistema de raízes R.

a) (1 pt) Se Δ é uma base de R, mostrar que $\mathfrak{g}$ é gerada, como álgebra de Lie, por $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, $\alpha \in \Delta$.

b) (1 pt) Desenhar o diagrama de Dynkin associado ao sistema de raízes F_4. A partir do diagrama de F_4, escrever a respectiva matriz de Cartan.

c) (1 pt) Existem álgebras de Lie semissimples de dimensão 7?

3. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples, e seja R um sistema de raízes com base $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

a) (1 pt) Seja $\sigma \in S_n$ uma permutação de $\{1, \dots, n\}$ tal que $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(j)} \rangle$ para quaisquer i e j. Mostrar que existe automorfismo f de $\mathfrak{g}$ tal que $f(x_i^{\pm}) = x_{\sigma(i)}^{\pm}$, para todo i. Aqui $x_i^{\pm}$ são geradores de $\mathfrak{g}$ como no teorema de Serre.

b) (1 pt) Definir *subálgebra de Cartan* de $\mathfrak{g}$. Encontrar uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}_3$.

c) (0,5 pt) Encontrar mais uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}_3$, diferente daquela de (b).

d) (0,5 pt) Definir *subálgebra de Borel* de $\mathfrak{g}$.

4. a) (0,5 pt) Se L é uma álgebra de Lie semissimples, definir o que é uma subálgebra toral (ou toroidal) maximal H de L. Definir o conjunto de raízes Ψ de L relativo a H.

b) (0,5 pt) Definir álgebra universal envolvente (ou envelopante) de uma álgebra de Lie L. Enunciar o teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt.

c) (1 pt) Definir *álgebra de Lie solúvel*. Enunciar os teoremas de Engel e de Lie.

MM 444, Álgebra não Comutativa
Exame de Qualificação ao Doutorado

Março de 2023

1. (3 pt) Seja R um anel, mostrar que as condições a seguir são equivalentes:

1. Se $a \in R$ com $aRa = 0$ então $a = 0$.
2. Se I é um ideal à esquerda de R tal que $I^2 = 0$ então $I = 0$.
3. Se I é um ideal à direita de R tal que $I^2 = 0$ então $I = 0$.
4. Se I é um ideal (bilateral) de R tal que $I^2 = 0$ então $I = 0$.
5. R não tem ideais (bilaterais) nilpotentes.

Como são chamados tais anéis?

2. a) (1 pt) Definir *Grupo de Brauer* de um corpo. (**Justificar que é um grupo!**)
b) (0,5 pt) Qual o grupo de Brauer do corpo dos reais $\mathbb{R}$? E dos complexos $\mathbb{C}$?
c) (1,5 pt) Mostrar o teorema de Frobenius que as únicas álgebras de divisão, de dimensão finita sobre os reais, e centro isomorfo a $\mathbb{R}$, são $\mathbb{R}$ e os quatérnios reais.

3. a) (0,5 pt) Enunciar o teorema de Wedderburn e Artin sobre os anéis artinianos e semissimples. Enunciar o teorema de Nagata e Higman sobre as álgebras nil.
b) (2 pt) Escolher um (**apenas um**) dos dois teoremas de (a) e fazer a demonstração dele.

4. a) (0,5 pt) Definir *álgebra central simples* sobre um corpo F.
b) (1 pt) Mostrar que se A, B são álgebras (de dimensão finita) sobre o corpo F, tais que $A \otimes_F B$ é simples, então A e B são ambas simples.
c) (1 pt) Mostrar que se A é central e simples e B simples (ambas de dimensão finita sobre F, então $A \otimes_F B$ é simples. Podemos afirmar que este produto tensorial é central (sobre F)?

Exame de Qualificação de Doutorado
Análise Funcional
Departamento de Matemática, UNICAMP
27 de Fevereiro de 2023

Q	Notas
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
$\sum$	

Nome:____

RA:____

Assinatura:____

Observação: É proibido desgrampear as folhas da prova. Respostas sem justificativas, ou que não incluam os cálculos necessários, não serão consideradas. Desejo-vos uma boa prova!

(1) (**2 pontos**) Seja $(X, \|\cdot\|)$ espaço de Banach e Y subespaço próprio fechado de X. Mostre que para qualquer $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ e $d(x, Y) > 1 - \epsilon$, em que $d(x, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\|$ é distância entre x e Y.

(2) (a) (**1 ponto**) Seja X um espaço normado. Mostre que $A \subseteq X$ é limitado se e somente se $\sup\{|f(x)| : x \in A\} < \infty$ para todo $f \in X^*$.

(b) (**1 ponto**) Seja T um operador linear no espaço de Hilbert H tal que

$$\langle Tx, y\rangle = i\langle x, Ty\rangle, \qquad \forall\, x, y \in H.$$

Mostre que T é limitado.

(3) (**2 pontos**) Seja $T : \ell^2 \to \ell^2$ um operador de translado-duplo definido por $(Tx)_n = x_{n+2}$ para todo $x \in \ell^2$.

(a) Calcule a norma de T.
(b) Determine o adjunto T^* de T.
(c) Calcule todos os autovalores de T.

(4) Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n) \subset H$ uma sequência em H. Mostre as seguintes.

(a) (**1 ponto**) Se o limite $x_n \rightharpoonup x \in H$ existe, ele é único e $\|x_n\|$ é limitado.
(b) (**1 ponto**) Para $T \in \mathcal{B}(H, H)$, $x_n \rightharpoonup x$ implica $Tx_n \rightharpoonup Tx$. (Dica: Use Representação de Riesz)

(5) (**2 pontos**) Seja $X := C([0,1], \mathbb{C})$ com norma de supremo $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, e seja $T : X \to X$ dado por $(Tf)(t) = tf(t)$, $f \in X$, $t \in [0,1]$. Mostre que o espectro de T é $\sigma(T) = [0,1]$. Mais ainda, determine os espectro pontual, espectro residual e espectro continuo.

Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Qualificação MM692-1S-2023
27 de Fevereiro de 2023

Q1 (2.0 pts). Seja ν e μ medidas com sinal em $(X, \mathcal{N})$ e $E \in \mathcal{N}$. Mostre os seguintes itens:

a) E é ν-nulo, se e somente se, $|\nu|(E) = 0$.

b) $\nu \perp \mu$, se e somente se, $|\nu| \perp \mu$, se e somente se, $\nu^+ \perp \mu$ e $\nu^- \perp \mu$.

c) $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \in \mathcal{N},\, F \subset E\}$ e $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \in \mathcal{N},\, F \subset E\}$.

Q2 (2.0 pts). Mostre os seguintes itens:

a) Se ν é uma medida complexa em $(X, \mathcal{N})$ e $\nu(X) = |\nu|(X)$, então $\nu = |\nu|$.

b) Se $f \in L^1_{loc}$ e f é continua em x, então x pertence ao conjunto de Lebesgue de f.

Q3 (2.0 pts). Seja μ uma medida de Radon em um espaço localmente compacto e Hausdorff X.

a) Seja N a união de todos os abertos $U \subset X$ tal que $\mu(U) = 0$. Mostre que N é aberto e $\mu(N) = 0$. O complementar de U é chamado o suporte de μ e é denotado por supp(μ).

b) Mostre que $x \in$supp(μ), se e somente se, $\int f d\mu > 0$ para toda $f \in C_c(X, [0,1])$ tal que $f(x) > 0$.

Q4 (2.0 pts). Assuma que μ é uma medida de Radon e $f \in L^1(\mu)$ é uma função que assume valores reais. Mostre que, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma função LSC g e uma função USC h tal que $h \leq f \leq g$ e $\int (g-h) d\mu < \varepsilon$.

Q5 (2.0 pts). Mostre que se μ é uma medida de Radon em um grupo localmente compacto G e $f \in C_c(G)$, então as funções $x \to \int L_x f d\mu$ e $x \to \int R_x f d\mu$ são contínuas.
(Obs: R_x translação a direita e L_x translação a esquerda)

Exame de Qualificação - Doutorado em Matemática
MM448 - GRUPOS DE LIE
Março 2023

Nome completo: RA:

---

1. Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie, ambos conexos, cujas álgebras de Lie denotamos $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Considere os conjuntos:

$$\begin{aligned} Z_G(H) &= \{g \in G : ghg^{-1} = h, \text{ para todo } h \in H\}, \\ Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) &= \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{h}\}. \end{aligned}$$

Provar que:

(a) $Z_G(H)$ é um subgrupo de Lie de G e que $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ é a sua álgebra de Lie.

(b) $Z_G(H) = \{g \in G : \mathrm{Ad}(g)X = X, \text{ para todo } X \in \mathfrak{h}\}$.

2. Sejam G, H grupos de Lie e seja $f : G \to H$ uma aplicação de recobrimento (sobrejetora) que também é um homomorfismo de grupos de Lie.

(a) Mostrar que $f(Z(G)) \subset Z(H)$.

(b) Sunha que G, H são conexos. Mostrar que para todo $g \in G$, $f \circ I^G_g = I^H_{f(g)} \circ f$, onde I^G e I^H denotam a conjugação em G e H respectivamente, e concluir que $Z(H) = f(Z(G))$. (Ajuda: utilizar as respectivas representações adjuntas Ad^G e Ad^H.)

3. Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo abstrato que é aberto como subespaço topológico.

(a) Mostrar que H é subgrupo de Lie de G e que existe U vizinhanza de e em G de forma que

$$U \subset H, \quad \text{e ainda} \quad G_0 = \cup_{n \in \mathbb{N}} U^n.$$

(b) Concluir que $G_0 = H_0$ (componentes conexas)

4. (a) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie solúvel. Mostrar que $\mathfrak{g}$ é compacta se e somente se $\mathfrak{g}$ é abeliana.

(b) Seja G um grupo de Lie solúvel e $H \subset G$ um subgrupo compacto e conexo. Mostrar que H é um toro.

Boa prova!

Exame de Qualificação - Doutorado em Matemática

MM423 - GEOMETRIA RIEMANNIANA

Março 2023

Nome completo: RA:

Escolha 4 (quatro) questões para resolver entre as seguintes.

1. Mostrar que as seguintes afirmações sobre um campo diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ numa variedade Riemanniana (M, g) são equivalentes:

   (a) X é um campo de Killing;

   (b) a derivada de Lie de g com respeito a X é nula, isto é, $\mathcal{L}_X g = 0$;

   (c) $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$, para toodos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde ∇ denota a conexão de Levi-Civita de (M, g).

2. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa e sejam $f_1, f_2 : M \to M$ isometrias. Suponha que existe $p \in M$ de forma que $f_1(p) = f_2(p)$ e $(df_1)_p = (df_2)_p$ (como transformações lineares).

   Mostrar que $f_1 = f_2$. (Ajuda: considerar o conjunto $S = \{q \in M : f_1(q) = f_2(q)$ e $(df_1)_q = (df_2)_q\}$; mostrar que é aberto e fechado em M).

3. Uma variedade Riemanniana (M, g) é dita homogênea se para quaisquer $p, q \in M$, existe uma isometria $f : M \to M$ de forma que $f(p) = q$. Mostrar que toda variedade homogênea é completa.

4. Mostrar que $\mathbb{S}^n$ com a métrica induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade de curvatura seccional constante igual a 1. Calcular, de forma rigorosa, as geodésicas desta variedade Riemanniana.

5. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

   (a) Se (M, g) uma variedade Riemanniana completa, então toda outra métrica Riemanniana g' em M é completa.

   (b) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ possui uma métrica de Einstein completa com constante de Einstein positiva.

   (c) Dados $p \in M$ e $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, tem-se que para todo $w \in T_v(T_pM)$ de norma 1, o campo

   $$J(t) = (d \exp_p)_{tv}(tw), \qquad t \in [0, a]$$

   é um campo de Jacobi.

Exame de Qualificação de Doutorado
Topologia Álgebrica

IMECC - UNICAMP

RA:

1	2	3	4	5	Total

Instruções:

- Esta avaliação deve ser realizada de forma individual.
- Escreva seus argumentos de forma legível.
- Não se esqueça de colocar RA em todas as folhas.

Problema 1:(2.0) Seja $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento de multiplicidade m de X, com m primo. Assumindo que $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo, prove que $\pi_1(X, x_0) \simeq \mathbb{Z}_m$.

Problema 2:(2.0)

a) Prove que $C(S^n) \simeq D^{n+1}$ e conclua que este espaço é contrátil.

b) Seja $f : S^1 \to S^1$ uma aplicação com grau$(f) \notin \{-1, 1\}$. Mostre que

$$C_f := C(S^1) \cup_f S^1$$

não é um espaço contrátil.

Problema 3:(2.0) Calcule

a) $\pi_i(\mathbb{C}P^n)$ para $1 \leq i \leq 2n+1$.

b) $\pi_3(K)$ onde K é a garrafa de Klein.

Problema 4:(2.0) Assuma que $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ com X_i aberto, para $i = 1, 2, 3$. Suponha que:

$$X_i \cap X_j \cap X_k$$

é contrátil ou vazio, para todo $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Mostre que $H_n(X) = 0$ para todo $n \geq 2$.

Problema 5: (2.0) Calcule os grupos de homologia de $X = S^1 \vee S^2 \vee S^3$ e $Y = S^1 \times S^2$ utilizando homologia CW ou simplicial. É possível que X e Y sejam homotopicamente equivalentes?

Boa prova!!