EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

10 de janeiro de 2022

Exercício 1: Considere uma amostra aleatória da função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \frac{6}{\theta^3} x(\theta - x)\, \mathcal{I}_{(0,\theta)}(x), \quad \theta > 0$$

(a) [*8 pts.*] Dê um estimador de θ pelo método dos momentos e utilize-o para dar um intervalo de confiança aproximadamente $100(1-\alpha)\%$ quando o tamanho da amostra é suficientemente grande.

(b) [*5 pts.*] Para tamanho de amostra igual a 1, dê um intervalo de confiança $100(1-\alpha)\%$ exato para θ.

(c) [*5 pts.*] Dê o estimador de máxima verossimilhança quando $n = 1$ e compare-o com o estimador de momentos encontrado no item (a) em termos de vício e erro quadrático médio.

(d) [*7 pts.*] Dê o valor-p do teste mais poderoso para as hipóteses $H_0 : \theta = 1$ vs $H_a : \theta = 2$, para um valor observado igual a $0,10$.

Exercício 2: Sejam $X_i \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$, $i = 1, \cdots, n$, variáveis aleatórias independentes, com $\theta \in \mathbb{R}$ desconhecida. Assuma uma distribuição à priori em $\theta, \pi(\theta)$, proporcional à função $\exp(-|\theta|/2)$, i.e.,

$$\pi(\theta) \propto \exp(-|\theta|/2)\mathcal{I}_{(-\infty,+\infty)}(\theta),$$

em que $\mathcal{I}_A(\cdot)$ indica a função indicadora do conjunto A.

(a) [*15 pts.*]

(i) [*10 pts.*] Determine a distribuição a posteriori de $\theta, \pi(\theta|x_1, \cdots, x_n)$, em que $x_1, \cdots, x_n$ é a sequência observada de $X_1, \cdots, X_n$.

(ii) [*5 pts.*] Use a forma identificada para a posteriori, no item anterior, para determinar a regra de decisão bayesiana para o teste.

$$H_0 : \theta \geq 0 \text{ versus } H_1 : \theta < 0.$$

Escolha para formular a regra de decisão uma função de perda e justifique sua escolha.

(b) [*10 pts.*] Considere o contexto

$$H_0 : \theta = 0 \text{ versus } H_1 : \theta \neq 0. \tag{1}$$

(i) [*5 pts.*] Compute o Fator de Bayes (FB).

(ii) [*5 pts.*] Assuma a perda $a_0 - a_1$, explique o sentido de $a_i, i = 0, 1$ e apresente a regra de decisão bayesiana para testar (1).

Exercício 3: Um modelo considera que o número de acidentes que ocorrem em uma certa estrada tenha distribuição de Poisson, com média proporcional a um índice de periculosidade que depende do dia. No i-ésimo dia, com índice de periculosidade x_i, temos que a média de acidentes é igual a θx_i. Para os dias $i = 1, ..., n$, foram observados os pares (y_i, x_i), em que os valores do índice são conhecidos.

(a) [*6 pts.*] Dê um modelo estatístico e a estatística suficiente e completa. Justifique.

(b) [*12 pts.*] Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ e dê sua distribuição exata e assintótica.

(c) [*7 pts.*] Para $n = 40$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 50$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 105$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 165$, dê o valor-p de um dos três testes assintóticos, razão de verossimilhança, Wald ou do escore (multiplicador de Lagrange) para testar a hipótese nula de que $\theta = 1$.

Exercício 4: Sejam $X_i \sim f(\cdot;\theta)$, $i = 1, \cdots, n$ variáveis aleatórias independentes. Com $\theta > 0$ parâmetro desconhecido. Onde, a densidade $f(\cdot;\theta)$ é dada a seguir,

$$f(x;\theta) = \frac{2\theta}{\pi} \exp\Big(- \frac{\theta^2 x^2}{\pi}\Big) \mathcal{I}_{[0,+\infty)}(x), \tag{2}$$

em que $\mathcal{I}_A(\cdot)$ indica a função indicadora do conjunto A.

(a) [*5 pts.*] Identifique uma estatística S suficiente, minimal e completa em função da amostra $X_1, \cdots, X_n$, para o parâmetro θ. Justifique.

(b) [*7 pts.*] Calcule (i) a esperança $\mathbb{E}(S)$, (ii) a variância $\mathrm{Var}(S)$ e (iii) a função geradora de momentos de S, sendo S a estatística identificada no item anterior.

(c) [*5 pts.*] Determine o estimador não viciado e de variância uniformemente mínima ENVVUM para $\frac{1}{\theta^2}$. Justifique.

(d) [*8 pts.*] Determine o estimador não viciado e de variância uniformemente mínima ENVVUM para θ^2. Justifique.

Exercício 5: Sejam $X_i \sim f(\cdot;\theta)$, $i = 1, \cdots, n$, variáveis aleatórias independentes, com $\theta > 0$ parâmetro desconhecido. $\mathcal{I}_A(\cdot)$ indica a função indicadora do conjunto A.
A densidade $f(\cdot;\theta)$ é dada pelas equações (3) e (4), respectivamente.

(a) [*13 pts.*]

$$f(x;\theta) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}\mathcal{I}_{[0,\theta]}(x). \tag{3}$$

(i) [*5 pts.*] Apresente as estimações para θ pelos métodos (i) dos momentos e (ii) de máxima verossimilhança. Determine de forma explícita o estimador de θ pelo método dos momentos.

(ii) [*8 pts.*] Considere o estimador de θ obtido pelo método dos momentos θ^*, e compute (i) a esperança de θ^*, $\mathbb{E}(\theta^*)$, (ii) a variância de θ^*, $\mathrm{Var}(\theta^*)$ e (iii) determine se θ^* pode ser considerado adequado sob algum critério e considerando (3). Justifique.

(b) [*12 pts.*]

$$f(x;\theta) = \frac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathcal{I}_{[0,\infty)}(x). \tag{4}$$

(i) [*5 pts.*] Apresente o estimador de θ, por máxima verossimilhança, $\hat{\theta}$, e verifique se $\hat{\theta}$ é uma estatística suficiente para θ.

(ii) [*7 pts.*] Determine o estimador não viciado e de variância uniformemente mínima ENVVUM para θ. Justifique.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

10 de fevereiro de 2022

Exercício 1: Considere o modelo de regressão

$$y_i = x_i^\beta + \epsilon_i, \quad i = 1, ..., n,$$

em que ϵ_i, $i = 1, ..., n$, são independentes com distribuição $N(0, \sigma^2)$ e x_i, $i = 1, ..., n$, são valores fixos e conhecidos. Defina $\boldsymbol{\theta} = (\beta, \sigma^2)'$.

(a) [*3 pts.*] Dê as equações para encontrar o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$.

(b) [*8 pts.*] Dê a matriz de informação de Fisher.

(c) [*7 pts.*] Dê um teste assintótico de tamanho α para testar $H_0 : \beta = 1$ *vs* $H_a : \beta \neq 1$. Não é necessário simplificar a estatística de teste.

(d) [*7 pts.*] Dê um teste assintótico de tamanho α para testar $H_0 : \sigma = 1$ *vs* $H_a : \sigma \neq 1$. Não é necessário simplificar a estatística de teste e nem dar a forma analítica do estimador de β, basta dar a equação a ser minimizada.

Exercício 2: Considere a variável aleatória X com função de densidade

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}\mathcal{I}_{(0,+\infty)}(x),\ \ \theta > 0. \tag{1}$$

Assuma uma distribuição à priori Uniforme no intervalo $[0,1]$ em θ, i.e., $\pi(\theta) = \mathcal{I}_{[0,1]}(\theta)$. Onde $\mathcal{I}_A(\cdot)$ indica a função indicadora do conjunto A.

Considere uma amostra de tamanho $n = 1$ seguindo a densidade dada pela equação (1).

(a) [*8 pts.*] Determine a distribuição a posteriori de $\theta, \pi(\theta|x_1)$.

(b) [*10 pts.*] Determine o estimador pontual Bayesiano para θ, $\hat{\theta}$ sob perda quadrática, $l(d,\theta) = (d-\theta)^2$.

(c) [*7 pts.*] Determine o estimador pontual Bayesiano para θ, $\hat{\theta}$ sob perda 0-1, $l(d,\theta) = \mathcal{I}_{\{\theta\}}(d)$.

Exercício 3: **(a)** [*17 pts.*] Considere as funções de probabilidades dadas na tabela abaixo:

	x				
	0	1	2	3	4
$p_1(x)$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
$p_2(x)$	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2
$p_3(x)$	0,3	0,1	0,1	0,1	0,4

e defina

$$p(x;\theta) = p_1(x)\mathcal{I}_{\{1\}}(\theta) + p_2(x)\mathcal{I}_{\{2\}}(\theta) + p_3(x)\mathcal{I}_{\{3\}}(\theta),$$

em que $\mathcal{I}_A(\cdot)$ indica a função indicadora do conjunto A.

(i) [*3 pts.*] Em uma amostra aleatória de tamanho 3 de $p(x;\theta)$ foram observados os valores $0, 1$ e 3. Dê a estimativa de máxima verossimilhança de θ.

(ii) [*6 pts.*] Considere uma amostra aleatória de tamanho 1 de $p(x;\theta)$. Para níveis de significância diferentes de zero e um, existe algum teste uniformemente mais poderoso para testar $H_0 : \theta = 1$ vs $H_a : \theta \in \{2, 3\}$? Caso existam, apresentem os testes, dando os seus níveis de significância e justifique. Caso não exista, justifique.

(iii) [*8 pts.*] Dê a região crítica de um teste da razão de verossimilhança generalizada que tenha tamanho diferente de zero e um para testar as hipóteses $H_0 : \theta = 1$ vs $H_a : \theta \in \{2, 3\}$. Dê o nível de significância do teste e sua função poder.

(b) [*8 pts.*] Considere uma amostra de tamanho 1 da função densidade de probabilidade:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta+1}{\theta^{\theta+1}} x^{\theta} \mathcal{I}_{(0,\theta)}(x), \quad \theta > 0.$$

Dê um teste uniformemente mais poderoso de nível de significância α para testar:

$$H_0 : \theta < \theta_0 \quad vs \quad \theta > \theta_0,$$

em que $\theta_0 > 0$.

Exercício 4: Sejam $X_i \sim f(\cdot;\theta)$, $i = 1, \cdots, n$ variáveis aleatórias independentes. Com $\theta > 0$ parâmetro desconhecido. Onde, a densidade $f(\cdot;\theta)$ é dada a seguir,

$$f(x;\theta) = \frac{3x^2}{\theta^3}\mathcal{I}_{[0,\theta]}(x), \tag{2}$$

em que $\mathcal{I}_A(\cdot)$ indica a função indicadora do conjunto A.

(a) [*5 pts.*] Determine o estimador de θ dado pelo método da máxima verossimilhança, $\hat{\theta}$. Justifique.

(b) [*5 pts.*] Determine o estimador de θ dado pelo método dos momentos, θ^*. Justifique.

(c) [*10 pts.*] Calcule os valores esperados $\mathbb{E}(\hat{\theta}), \mathbb{E}(\theta^*)$ e as variâncias $\text{Var}(\hat{\theta}), \text{Var}(\theta^*)$, onde $\hat{\theta}$ e θ^* são os estimadores determinados nos itens anteriores.

(d) [*5 pts.*] Compare os estimadores $\hat{\theta}$ e θ^* determinados nos 2 primeiros itens usando algum critério de consistência. Justifique.

Exercício 5: Sejam X_i $i = 1, \cdots, n$, variáveis aleatórias independentes, e θ um parâmetro desconhecido e positivo.

(a) [*13 pts.*] $X_i \sim f(\cdot;\theta)$, $i = 1, \cdots, n$, onde a densidade $f(\cdot;\theta)$ é dada pela equação (3),

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\mathcal{I}_{[0,\theta]}(x), \tag{3}$$

$\mathcal{I}_A(\cdot)$ indica a função indicadora do conjunto A.

(i) [*5 pts.*] Considere a estatística de ordem $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Mostre que $X_{(n)}$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ e determine a distribuição exata de $X_{(n)}$.

(ii) [*8 pts.*] Use $X_{(n)}$ como quantidade pivotal para θ e identifique o Intervalo de Confiança $100(1-\alpha)\%$ para θ **de menor amplitude** e exato, sabendo que $n = 20$, o valor observado de $X_{(n)}$ é 10 e $1-\alpha = 0.90$.

(b) [*12 pts.*] $X_i \sim p(\cdot;\theta)$, $i = 1, \cdots, n$, onde a distribuição de probabilidades pontual $p(\cdot;\theta)$ é dada pela equação (4),

$$p(x;\theta) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^x \mathcal{I}_{\{0,1,2,3,\ldots\}}(x), \tag{4}$$

$\mathcal{I}_A(\cdot)$ indica a função indicadora do conjunto A.

(i) [*5 pts.*] Compute os estimadores de θ, (i) por máxima verossimilhança, $\hat{\theta}$ e (ii) pelo método dos momentos, θ^*. Compare $\hat{\theta}$ e θ^*.

(ii) [*7 pts.*] Determine, se houver, um estimador não viciado e de variância uniformemente mínima ENVVUM para θ. Justifique.