EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

PROVA DE INFERÊNCIA

07 de janeiro de 2019

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 4 horas.

2. Não é permitido consulta.

3. Inicie cada questão em uma nova folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.

4. Escolha 4 das 5 questões, indicando-as claramente. Responda, mostrando seu argumento de forma clara e concisa. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

5. Tranquilidade e Boa Sorte.

1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X|\theta \sim N(\theta, b\sigma^2 + a\theta^2)$, com a e b conhecidos e positivas.

   (a) [0.8] Suponha que n é grande e σ^2 conhecido. Encontre um teste para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$;

   (b) [0.8] Para $n = 20$ e $b = 0$, obtenha um IC para θ (positivo) com coeficiente de confinaça γ;

   (c) [0.9] Considere o modelo particular $X|\theta \sim N(\theta, 1)$, com $\theta \sim N(0, 1)$. Para uma amostra de tamanho 1, sabe-se que $\theta|x \sim N(x/2, 1/2)$. Para funçao de perda

   $$L(\theta, d) = e^{3\theta^2/4}(\theta - d)^2.$$

   Mostre que o estiamdor de Bayes é dado por $d^\pi(X) = 2X$ e compare com EMV usando o EQM.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma distribuição geométrica com função de probabilidade

   $$f(x|\theta) = (1 - \theta)^x \theta I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x), \; 0 < \theta < 1.$$

   Suponha que θ tenha distribuição priori $Beta(\alpha, \beta)$

   (a) [0.8] Encontre a distribuição posteriori de θ dado $X_1, \ldots, X_n$.

   (b) [0.8] Encontre o estimador de Bayes de θ sob a perda quadrática.

   (c) [0.9] Encontre o estimador de Bayes de $(1 - \theta)/\theta^2$ sob a perda quadrática.

3. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma a. a. de $X \sim U(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$ com $\alpha \in \Re$ e $\beta > 0$.

   (a) [0.8] Obtenha os estimadores obtido pelo método dos momentos de α e β;

   (b) [0.8] Se $\alpha = \beta$ encontre um ENVUMV de β^2;

   (c) [0.9] Para $\alpha = \beta$ e considerando uma amostra de tamanho 1, encontre o estimador de Bayes com respeito a perda $L(\beta, d) = \beta(d - \beta)^2$ quando $\beta \sim U(0, 1)$.

4. Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de uma $N(\mu, \sigma^2)$

   (a) [0.5] Para μ conhecido, encontre um ENVUMV para $\tau(\sigma^2) = \mu\sigma^4$;

   (b) [1.0]Qual é o EMV para o terceiro quartil?;

   (c) [1.0] Existe ENVUMV para $P(X_1 > 0)$? Se sim, encontre-o.

   Obs.: $X_1 - \bar{X}$ é independente de $\bar{X}$, e $\bar{X}$ é independente de S^2

5. Considere o modelo de regressão linear definido por

$$Y_i = \mu + \beta x_i + e_i, \quad i = 1, ..., n,$$

   onde $e_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, ..., n$ são independentes, e as variávesi $x_1, ..., x_n$ conhecidas.

   (a) [0.5] Para σ^2 conhecida, determine as estatística suficientes;

   (b) [1.0] Encontre um ENVUMV para β quando $\mu = 2$;

   (c) [1.0] Para $\beta = 0$, obtenha a estatistica de Wald, para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Mostre que converge em distribuição para uma qui-quadrado sob H_0.

Exame de Qualificação

Mestrado em Estatística

Prova de Probabilidade

02 de Agosto de 2019

Instruções:

- *A prova é composta de 5 questões.*
- *A duração da prova é de 4 horas.*
- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha.*
- *Escreva seu nome completo e seu RA em cada folha.*
- *Escreva de maneira clara e organizada.*
- *Justifique suas respostas.*

Boa prova!

Questão 1:

Sejam $A, B, A_1, A_2, \ldots$ eventos em um espaço de probabilidade. Suponha que $A_n \uparrow A$, ou seja,

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ para todo } n \geq 1 \quad \text{e} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

Suponha também que B é independente de A_n para todo $n \geq 1$. Prove que A e B são independentes.

Questão 2:

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme em $[0, \theta]$, onde $\theta > 0$. Sejam

$$U = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{e} \quad V = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

(a) Prove que a densidade conjunta de (U, V) é

$$f(u,v) = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)(v-u)^{n-2}}{\theta^n}, & \text{se} \quad 0 \leq u < v \leq \theta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Obtenha a densidade de $V - U$.

Questão 3:

Seja (X, Y) um ponto escolhido aleatoriamente no quadrado $(0,1) \times (0,1)$. A densidade conjunta de X e Y é

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \ \text{e} \ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $Z = XY$. Determine:

(a) A densidade de Z.

(b) $E(X \mid Z = z)$ para $0 < z < 1$.

Questão 4:

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $X_1 \sim U[0,1]$.

(a) Prove que $n^{-X_n} \xrightarrow{\text{P}} 0$, ou seja, $n^{-X_n} \to 0$ em probabilidade.

(b) Prove que n^{-X_n} não converge quase certamente para 0.

Questão 5:

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme em $(-\theta, \theta)$, $\theta > 0$. Para $n \geq 1$, definimos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{e} \qquad Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Mostre que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n} Y_n} \xrightarrow{\text{D}} N\big(0, \tfrac{1}{3}\big),$$

ou seja, $\dfrac{S_n}{\sqrt{n} Y_n}$ converge em distribuição para uma variável aleatória que possui distribuição $N\big(0, \frac{1}{3}\big)$.