EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO
MM 453 - Topologia Geral
Fevereiro 2022

Nome completo: RA:

Escolha três questões para resolver entre as primeiras 5. **Na sequência**, escolha duas letras para resolver da questão 6.

1. Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos conexos de um espaço topológico X. Seaja A um conjunto conexo de X tal que $A \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Prove que o conjunto $A \cup (\bigcup_{i \in I} A_i)$ é conexo.

2. Sejam X, Y espaços topológicos, com Y compacto. Se V é um subespaço aberto de $X \times Y$ contendo o conjunto $\{x_0\} \times Y$, então existe uma vizinhanza aberta W de x_0 em X tal que $W \times Y$ está contido em V.

3. Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito estrelado se existe um $a \in A$ de forma que para todo $p \in A$, o conjunto $\{ta + (1-t)p : t \in [0, 1]\}$ está contido em A. Mostrar que se A é estrelado então é conexo e simplesmente conexo.

4. Seja $A \subset x$ um subconjunto de um espaço topológico. Denote $Y = (X - A) \cup \{A\}$ (notar que $\{A\}$ é um conjunto com exatamente um elemento). Defina a aplicação $\pi : X \to Y$ por
$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \notin A, \\ \{A\} & \text{se } x \in A. \end{cases}$$
Considere Y com a topologia quociente.
   (a) Mostrar que se $F \subset X$ é fechado e $F \cap A = \emptyset$, então $\pi(F)$ é fechado em Y.
   (b) Mostrar que se Y é Hausdorff, então A é fechado em X.

5. Provar que todo espaço topológico compacto e Haussdorf é normal.

6. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique ampliamente sua escolha.
   (a) Se $X = \mathbb{R}$ é dotado com a topologia do complemento finito, então a função $f : X \to X$, $f(x) = \sin x$ é continua.
   (b) Se X e Y são espaços compactos e metricos, e $f : X \to Y$ é continua e bijetora, então f é um homeomorfismo.
   (c) Se $K \subset X$ é um subespaçõ compacto, então o fecho $\overline{K}$ é compacto.
   (d) Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Então X é metrizável se e somente se X tem uma base enumerável.

Boa prova!

MM 719, Álgebra Linear
Exame de Qualificação ao Mestrado

Fevereiro de 2022

1. Seja $V = M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com coeficientes reais. Definimos a função $\langle -, - \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ por $\langle A, B \rangle = tr(B^t A)$, A, $B \in V$, onde B^t é a transposta de B e tr é o traço matricial.

a) (1 pt) Mostrar que esta função define um produto interno em V.

b) (0,5 pt) Seja $P \in V$ uma matriz invertível fixa, definimos $T \colon V \to V$ como $T(A) = P^{-1}AP$. Mostrar que T é uma transformação linear em V.

c) (1 pt) Encontrar a adjunta T^* da transformação T, isto é, $\langle T(A), B \rangle = \langle A, T^*(B) \rangle$ para quaisquer A, $B \in V$.

2. a) (0,5 pt) Seja k número natural, existe uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A \neq I_n$, a matriz identidade $n \times n$, mas $A^k = I_n$?

b) (1 pt) Existe uma matriz $A \in M_n(\mathbb{Q})$ tal que $A \neq I_n$, a matriz identidade $n \times n$, mas $A^{n+1} = I_n$?

3. Seja $T \colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ uma função, cuja ação sobre os vetores e_1, e_2, e_3, e_4 da base canônica de $\mathbb{C}^4$ é dada por

$$T(e_1) = 2e_1 + 2e_3 - e_4, T(e_2) = 4e_2, T(e_3) = -4e_1 + 2e_2 + 8e_3 - 2e_4, T(e_4) = -4e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 2e_4.$$

a) (0,5 pt) Mostrar que existe uma única transformação linear T em $\mathbb{C}^4$ com esta ação sobre os vetores da base canônica.

b) (2 pt) Encontrar a forma canônica de Jordan de T e uma base de Jordan para T em $\mathbb{C}^4$.

4. (1,2 pt) Sejam V, W $\mathbb{R}$-espaços vetoriais. Responder **verdadeira** ou **falsa** a cada uma das afirmações abaixo. (Respostas sem a devida justificativa serão desconsideradas!)

1) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \ldots \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$.

2) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} W$ é isomorfo a W.

3) $V^* \otimes_{\mathbb{R}} \ldots \otimes_{\mathbb{R}} V^*$ é isomorfo a $(V \otimes_{\mathbb{R}} \ldots \otimes_{\mathbb{R}} V)^*$.

4) $Hom(V, W) = V^* \otimes_{\mathbb{R}} W$.

5. (0,8 pt) Seja V um espaço vetorial de dimensão $n < \infty$ sobre $\mathbb{C}$ e seja $P \colon V \to V$ uma transformação linear tal que $P^2 = P$. Mostrar que o traço de P é igual ao posto de P.

6. (2,5 pt) Enunciar e demonstrar o Teorema Espectral.

Exame de Qualificação de Mestrado
Análise no $\mathbb{R}^n$
Departamento de Matemática, UNICAMP
21 de Fevereiro de 2022

Q	Notas
1.	
2.	
3.	
4.	
$\sum$	

Nome:____

RA:____

Assinatura:____________________________________

Observação: É proibido desgrampear as folhas da prova. Respostas sem justificativas, ou que não incluam os cálculos necessários, não serão consideradas. Desejo-vos uma boa prova!

(1) (**2,5 pontos**)

(a) (1,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável. Suponha que $\|Df(x)\| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$

(Dica: Use o teorema de valor médio definindo uma função apropriada de uma variável.)

(b) (1,0 ponto) Fornece um contra-exemplo para a seguinte generalização engênua de Teorema do valor médio: Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável e pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$, existe algum ponto c na reta que liga x e y tal que

$$f(x) - f(y) = Df(c)(x - y).$$

(2) (**2,5 pontos**) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) (1.3 ponto) Mostre que o conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ onde $Df(x)$ possui rank (posto) n é aberto.

(b) (1.2 ponto) Use o teorema da aplicação inversa para mostrar que $f(S) \subset \mathbb{R}^n$ também é aberto.

(3) (**2,5 pontos**) Seja M uma k-variedade compacta em $\mathbb{R}^n$. Sejam $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria e $N = h(M)$. Seja $f : N \to \mathbb{R}$ uma função continua. Mostre que N é uma k-variedade em $\mathbb{R}^n$, e

$$\int_N f\, dV = \int_M (f \circ h)\, dV.$$

Mais ainda, conclua que M e N tem o mesmo volume.

(4) (**2,5 pontos**) Considere a variedade $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad z \geq \frac{1}{2}\}$ e a 2-forma $\beta = 2x\, dx \wedge dz + 2z\, dy \wedge dz$.

(a) (0,5 pontos) Encontre uma forma α tal que $\beta = d\alpha$.
(b) (1.0 ponto) Exibe parametrização de ∂M.
(c) (0,5 pontos) Calcule $\int_M \beta$.