EXAME DE QUALIFICAÇÃO - DOUTORADO
MM423 - GEOMETRIA RIEMANNIANA
23/02/2022

Nome: **RA:**

Escolha e resolva 4 (quatro) questões.

(1) (a) Defina isometria entre variedades riemannianas.
(b) Defina imersão isométrica.
(c) Defina campos de Jacobi e pontos conjugados numa variedade riemanniana.
(d) Enuncie o Teorema do Índice de Morse para geodésicas.

(2) Seja X um campo de Killing na variedade Riemanniana (M, g). Mostre que o tensor $(u, v) \mapsto g(\nabla_u X, v)$ é anti-simétrico. (∇ denota a conexão de Levi-Civita).

(3) Seja ∇ uma conexão sobre uma variedade M com torsão T. Mostre que $\tilde{\nabla}$ definida por

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \lambda T(X, Y)$$

é uma conexão em M para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Qual a torsão desta conexão ? É possível obter uma conexão sem torsão em M a partir de ∇ ?

(4) Enuncie o Teorema de Bonnet-Myers. Dê exemplo de uma variedade riemanniana completa $M \subset \mathbb{R}^n$ não compacta e com $K > 0$. Isso contradiz o Teorema de Bonnet-Myers? Justifique sua resposta detalhadamente.

(5) (a) Dê exemplo de variedade M e duas métricas riemannianas g_1, g_2 tal que (M, g_1) é completa e (M, g_2) não é completa. Justifique todos seus argumentos.
(b) A variedade $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^n$ admite uma métrica de curvatura seccional positiva ? Justifique sua resposta.

(6) Seja M uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, equipada com a métrica induzida. Prove que a curvatura seccional e a curvatura de Gauss de M coincidem em cada ponto $p \in M$.

IMECC/Unicamp
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação ao Doutorado
MM425- Análise Funcional I

RA: ____________ **Nome:** ____________________________________

Responda a **no máximo cinco** das questões abaixo.

Q1. Mostre que $\{1, t, t^2, \ldots, \}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{C}([0,1])$ sem subsequência convergente. Então a propriedade *Heine-Borel* não se aplica aqui, explique por quê?

Q2. Seja $\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ uma função linear que *não* é limitada em um espaço de Banach $\mathcal{H}$. Mostre que

$$\phi(B_1) = \mathbb{C}$$

onde $B_1 = \{x \in \mathcal{H} : ||x|| \leq 1\}$.

Q3. (a) Escreva o teorema da categoria de Baire (sem demonstração).

(b) Uma *base de Hamel* B de um espaço vectorial E é um subconjunto de E que é linearmente independente e $\text{span}(B) = E$. Seja X um espaço de Banach com dimensão infinita. Use (a) para provar que cada base de Hamel de X é não-enumerável.

Q4. Use o *lema de Zorn* para provar que todo espaço vetorial tem uma base de Hamel.

Q5. Seja E um espaço de Banach. Para cada $f \in E$, define um funcional $\hat{f} : E^* \to \mathbb{C}$ no espaço dual de E pelo

$$\hat{f}(\phi) = \phi(f) \qquad \forall \ \ \phi \in E^*.$$

Mostre que $\hat{f}$ pertence a $E^{**} := (E^*)^*$ (o segundo dual de E).

Q6. (a) Enuncie o teorema de Hahn-Banach (sem demonstração).

(b) Seja X um espaço linear com norma e Y um subconjunto de X. Mostre que $\text{span}(Y)$ é denso em X se e só se o seguinte é verdade:

$$\phi \in X^* \ \ \textit{com} \ \ \phi(y) = 0 \ \ \forall \ y \in Y \qquad \Longrightarrow \qquad \phi \equiv 0.$$

MM 427, Álgebra Comutativa
Exame de Qualificação ao Doutorado

Fevereiro de 2022

1. (1,0 pt) Sejam A um anel, $a \subseteq A$ um ideal, M um A-módulo. Suponha $aM = M$ e a nilpotente. Prove que $M = 0$.

2. (2,0 pt) Seja $\mathbb{F}_q$ o corpo finito com q elementos, e $\mathbb{F}_q[X, Y]$ o anel de polinômios em duas indeterminadas a coeficientes em $\mathbb{F}_q$. Seja $F = X^qY - XY^q$ e $A = \mathbb{F}_q[X, Y]/\langle F \rangle$. Para todo $\alpha \in \mathbb{F}_q$, prove que A não é finitamente gerado sobre $P = \mathbb{F}_q[y - \alpha x]$, onde $x, y \in A$ são os resíduos de X, Y.

3. (2,0 pt) Seja A um anel, e $m_1, \dots, m_n$ ideais maximais em A. Suponha $m_1 \cdots m_n = 0$. Seja $a_0 = A$,e para $1 \leq i \leq n$, seja $a_i = m_1 \cdots m_i$ e $V_i = a_{i-1}/a_i$. Usando os a_i e os V_i, prove que A é Artiniano se, e somente se, A é Noetheriano.

4.

a) (1,5 pt) Seja A um anel Noetheriano local com um primo principal p de altura ≥ 1. É verdade que A é um domínio? Prove ou dê um contra-exemplo.

b) (1,0 pt) Seja k um corpo, $P = k[[X]]$ o anel das séries formais em uma variável com coeficientes em k. Seja $A := P \times P$. Mostre que A é Noetheriano e semilocal, e que A contém um primo principal p de altura 1, porém A não é domínio.

5. (2,0 pt)Encontre todos os anéis intermediários $\mathbb{Z} \subseteq A \subseteq \mathbb{Q}$, e descreva cada um deles como uma localização de $\mathbb{Z}$. Dica: comece mostrando que $\mathbb{Z}[2/3] = S^{-1}\mathbb{Z}$, onde $S = \{3^i \mid i \geq 0\}$.

6.

a) (1,5 pt) Enuncie e prove o Teorema dos zeros de Hilbert na versão forte.

b) (1,0 pt) Mostre que a versão forte do Teorema dos Zeros de Hilbert implica a sua versão fraca.

Boa prova!

MM 439, Álgebras de Lie
Exame de Qualificação ao Doutorado

Fevereiro de 2022

As álgebras de Lie são consideradas sobre o corpo dos complexos, e são de dimensão finita.

1. a) (0,5 pt) Definir a *forma de Killing* de uma álgebra de Lie.

b) (1 pt) Mostrar que uma álgebra de Lie L é semissimples se e somente se a sua forma de Killing é não degenerada.

c) (1 pt) Seja L uma álgebra de Lie e I um ideal de L. Se I, como uma álgebra de Lie, é semissimples, mostrar que existe um ideal J de L tal que $L = I \oplus J$, soma direta de *espaços vetoriais*.

2. Seja L uma álgebra de Lie semissimples.

a) (0,5 pt) Definir *subálgebra toroidal maximal* H de L.

b) (1 pt) Mostrar que se H é uma subálgebra toroidal maximal de L, então H coincide com o seu normalizador em L.

c) (1 pt) Existem álgebras de Lie semissimples de dimensão 7? E de dimensão 8?

3. Seja E um espaço vetorial euclidiano (sobre os reais) e de dimensão finita.

a) (1 pt) Definir um *sistema de raízes* Φ em E. Definir o *grupo de Weyl* W de Φ. Definir a *matriz de Cartan* do sistema de raízes Φ.

b) (0,5 pt) Quais são os possíveis ângulos entre dois vetores de Φ?

c) (1 pt) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Justificar que A é a matriz de Cartan de um sistema de raízes Φ. Desenhar o diagrama de Dynkin associado à matriz A (e ao Φ).

4. a) (0,5 pt) Definir *álgebra universal envolvente* $U(L)$ de uma álgebra de Lie L. Enunciar o *teorema de Poincaré, Birkhoff e Witt*.

b) (1 pt) Se L é a álgebra de Lie de dimensão 2, com base a e b tais que $[a, b] = a$, descrever uma base para $U(L)$. Mostrar, sem o uso do teorema de PBW, que o homomorfismo canônico $i \colon L \to U(L)$ é injetivo neste caso.

5. Seja $L = sl(2, \mathbb{C})$ e seja V um L-módulo de dimensão finita.

a) (0,5 pt) Mostrar que L tem subálgebras solúveis de dimensão 2.

b) (1 pt) Mostrar que V tem vetor maximal.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO - DOUTORADO
MM447 - TOPOLOGIA ALGÉBRICA
23/02/2022

Nome: **RA:**

Escolha e resolva 5 (cinco) questões.

(1) Descreva, com o máximo de detalhes possível, o procedimento para calcular $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ usando espaços de recobrimento.

(2) (a) Enuncie o Teorema de Van Kampen.
(b) Use o Teorema de Van Kampen para calcular $\pi_1(S^1 \vee S^1)$.

(3) Calcule $\pi_2(S^2 \vee S^2)$.

(4) Descreva uma decomposição CW de $\mathbb{CP}^n$. Calcule os grupos de homologia de $\mathbb{CP}^n$.

(5) Dê, se possível, um exemplo de dois espaços topológicos X e Y tais que $\pi_q(X) = \pi_q(Y)$, para todo q, mas X e Y não são homeomorfos. Justifique sua resposta em detalhes.

(6) Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento e $n \geq 2$. Prove que $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ é um isomorfismo.

(7) Mostre que os espaços topológicos $T = S^1 \times S^1$ e $M = S^1 \vee S^1 \vee S^2$ possuem os mesmos grupos de homologia. Os espaços T e M são homeomorfos ? Justifique sua resposta em detalhes.

(8) Encontre os grupos de homologia da garrafa de Klein.

(9) (a) Defina a característica de Euler de um complexo CW.
(b) Calcule a característica de Euler de uma superfície compacta, conexa, sem bordo, orientável e de gênero g.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE DOUTORADO
MM448 - Grupos de Lie
Fevereiro 2022

Nome completo: RA:

Escolha quatro questões para resolver entre as seguintes.

1. Seja G um grupo de Lie conexo e seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie, com núcleo discreto. Mostrar que $\ker \phi$ está contido no centro de G.

2. O objetivo desta questão é de mostrar que $S^1 \times SU(n)$ e $U(n)$ são difeomorfos como variedades diferenciáveis mas não como grupos de Lie. Para isso:

   (a) mostrar que $\varphi : S^1 \times SU(n) \to U(n)$, $\varphi(e^{2\pi i\theta}, A) = e^{2\pi i\theta}A$ está bem definida e é um homomorfismo de grupos de Lie e estudar seu núcleo $\ker \varphi$. Concluir que $S^1 \times SU(n)$ e $U(n)$ possuem as mesmas álgebras de Lie.

   (b) mostrar que há elementos em $\ker \varphi$ de ordem finita. Comparando com o centro de $U(n)$, concluir que $S^1 \times SU(n)$ e $U(n)$ não são isomorfos como grupos de Lie.

   (c) considere a função $f : U(n) \to S^1 \times SU(n)$ definida como

   $$f(A) = (\det A, \text{diag}(\det(A)^{-1}, 1, 1, 1 \ldots, 1) \cdot A).$$

   Mostrar que f está bem definida e é diferenciável e invertível. Concluir que $S^1 \times SU(n)$ e $U(n)$ são difeomorfos como variedades diferenciáveis.

3. Sejam G e H grupos de Lie e $\phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Mostrar que o gráfico de ϕ é um subgrupos de Lie de $G \times H$ e achar a sua álgebra de Lie.

4. Seja G um grupo de Lie conexo, compacto e não abeliano. Mostrar que a aplicação exponencial não é um difeomorfismo local.

5. Mostre que a álgebra de Lie de $PGL(n, \mathbb{C}) := GL(n, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$, onde $\mathbb{C}^*$ designa o subgrupo das matrizes escalares não nulas) é isomorfa a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

6. Sejam G grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $K, H \subset G$ dois subgrupos com subálgebras de Lie $\mathfrak{k}, \mathfrak{h}$ respectivamente. Suponha que K é compacto e H é fechado, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$ (soma direta de espaços vetoriais). Mostre que $G = KH$ e que a ação de K em G/H é transitiva e que G/H é compacto.

Boa prova!