Exame de Qualificação de Probabilidade
Doutorado em Estatística
12 de janeiro de 2017

Instruções:

1. A prova é composta de 3 exercícios que devem ser respondidos de forma clara e completa.
2. A duração da prova é de 4 horas.
3. Não é permitido consulta.
4. Inicie cada exercício em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

Exercício 1: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória real definida sobre Ω com $E|X| < \infty$. Suponha que $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{F}$ formam uma partição de Ω tal que $P(D_i) > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Seja $\mathcal{D}$ a sigma álgebra gerada pelos D_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1) Descrever os elementos de $\mathcal{D}$.
2) Mostrar que $E(X \mid \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{P(D_i)} \int_{D_i} X dP \right) \mathbf{1}_{D_i}$.

Exercício 2: Seja $(X_n)_{n \geq 2}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com leis exponenciais com parâmetros positivos λ_n. Lembramos que $E(X_n) = \lambda_n^{-1}$.

1) Mostrar que $X_n \to 0$ em L^1 se e somente se $\lambda_n \to +\infty$.
2) Mostrar que $X_n \to 0$ em probabilidade se e somente se $X_n \to 0$ em L^1.
3) Usando o lema de Borel-Cantelli, dar uma condição necessária e suficiente (do tipo "para todo $\varepsilon > 0$ a série...") sobre a sequência $(\lambda_n)_{n \geq 2}$ para que $(X_n)_{n \geq 2}$ convirja para 0 quase certamente. Dar um exemplo de sequência

$(\lambda_n)_{n\geq 2}$ para a qual $(X_n)_{n\geq 2}$ converge para 0 quase certamente.
4) Provar que se $\lambda_n \to +\infty$ e $\sup_{n\geq 2}(\lambda_n/\ln n) < +\infty$, então $(X_n)_{n\geq 2}$ não converge quase certamente.

Exercício 3: Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes com lei normal padrão. Consideramos $Z = X + Y$ e $W = X - Y$.

1) Usando funções características, mostrar que Z e W são independentes e precisar as suas leis. Lembramos que a função característica de uma lei normal padrão é dada por $\phi(t) = e^{-t^2/2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
2) Deduzir a esperança condicional e a lei condicional de X dado Z.
3) Calcular $E(XY \mid Z)$ e $E(XYZ \mid Z)$.

Exame de Qualificação – Doutorado em Estatística
Inferência Avançada
12 de Janeiro de 2017

Instruções:

1. A prova de Inferência Avançada é composta de 3 questões que devem ser respondidas de forma clara e completa.

2. Não é permitido consulta.

3. Inicie cada questão em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

4. Valores das questões: 1) 3,3   2) 3,3   3) 3,4.

Questões

1. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ um vetor de variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim \exp(\mu\, e^{\beta\, z_i})$, onde z_1,...,z_n são constantes conhecidas. Isto é, a fdp de X_i é dada por

$$f_{X_i}(x_i|\mu,\beta) = \mu\, e^{\beta\, z_i}\, e^{-(\mu e^{\beta\, z_i})\, x_i}\; I_{(0,\infty)}(x_i), \mu > 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ um vetor de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial $exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ tal que é independente de $\mathbf{X}$.

(a) Suponha m grande, e teste as hipóteses $H : \beta = 0$ contra $K : \beta \neq 0$ ao nível de significância α;

(b) Para $\beta = 0$, encontre o estimador não viciado de variância uniformemente mínima de λ/μ (suponha que $n > 2$);

(c) Para $\beta = 0$ e $n = m$, obtenha a estatística de Wald (Q_W) para testar as hipóteses $H : \mu = \lambda + 1$ contra $K : \mu \neq \lambda + 1$.

Obs.: Se $Y \sim$ Gama(α, β), $\alpha > 0$, $\beta > 0$, então $f_Y(y; \alpha, \beta) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, y^{\alpha-1}\, e^{-\beta y}\, I_{(0,\infty)}(y)$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. da distribuição exponencial com média θ, cuja densidade é

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}\, e^{-x/\theta}\, I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Para a estimação de θ cosidere a função perda $L(\theta, \delta) = (\theta - \delta)^2/\theta^2$, e considere como distribuição a priori de θ a distribuição Gama Inversa(α, β), cuja densidade é dada por

$$\pi(\theta|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, \frac{e^{-\beta/\theta}}{\theta^{\alpha+1}}\, I_{(0,\infty)}(\theta), \alpha > 0, \beta > 0,$$

onde $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$ e $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$, com os hiperparâmetros α e β conhecidos.

(a) Prove que a família de distribuições Gama Inversa é conjugada à família de distribuições de X, e que o estimador de Bayes é dado por

$$\delta_{\alpha,\beta}(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + \beta}{\alpha + n + 1}.$$

(b) Para $\beta = 1$, mostre que a função de risco e o risco de Bayes do estimador $\delta_{\alpha,1}(\mathbf{X})$ (dado no intem anterior) são respectivamente dadas por

$$R(\theta, \delta_{\alpha,1}) = \frac{1}{(\alpha + n + 1)^2\, \theta^2} \left[1 - 2(\alpha + 1)\, \theta + ((\alpha + 1)^2 + n)\, \theta^2\right] \quad \text{e}$$

$$r(\lambda_{\alpha,1}, \delta_{\alpha,1}) = \frac{1}{\alpha + n + 1},$$

(c) Prove que o estimador $\delta^*(\mathbf{X}) = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n+1}$ é minimax.

3. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $U[b\theta, \theta]$, com $\theta > 0$, e $b < 1$ conhecido

(a) Para $0 < b < 1$, e $n = 1$, detemine o intervalo de credibilidade de mais alta densidade para θ quando a distribuição a priori é $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta} I_{(0,\infty)}(\theta)$;

(b) Mostre que para $b = -1$, $U = max(|X_1|,...,|X_n|)$ é independente de $V = X_{(1)}/X_{(n)}$;

(c) Utilizando o estimador obtido pelo método dos momentos e supondo n grande, encontre um teste assintótico para testar as hipóteses $H : \theta = \theta_0$ contra $K : \theta \neq \theta_0$.