Exame de Qualificação

Mestrado em Estatística

Prova de Probabilidade

28 de Julho de 2021

Instruções:

1. A prova é **individual** e não é permitido trocar ideias ou conversar com colegas.
2. Durante o Exame, consultas aos membros da banca não serão permitidas.
3. O Exame é composto de várias questões. Cada questão deverá ser tratada de forma clara, organizada e completa, sempre justificando apropriadamente as respostas.
4. As questões deverão ser resolvidas à mão, de forma legível, em folhas de papel de tamanho A4, utilizando caneta (azul ou preta) ou lápis escuro.
5. A resolução de cada questão deverá ser iniciada em uma nova folha. Não é necessário reproduzir o enunciado das questões.
6. Juntamente com as folhas de resolução, deverá ser incluída uma folha de rosto contendo **somente** o nome completo do(a) aluno(a), seu número de RA, sua assinatura, as referências bibliográficas consultadas durante a prova e o número total de páginas de sua resolução.
7. O enunciado do Exame será enviado ao e-mail institucional de cada aluno(a), às **9:00 hs** (horário de Brasília) do dia **28 de julho de 2021**. O(A) aluno(a) deverá, logo em seguida, confirmar o recebimento do Exame, enviando uma mensagem de e-mail para ***diegofb@unicamp.br*** e ***gallesco@unicamp.br***.
8. Cada aluno(a) deverá digitalizar sua resolução do Exame e enviá-la aos endereços ***diegofb@unicamp.br*** e ***gallesco@unicamp.br***, até as **15:00 hs** (horário de Brasília) do dia **28 de julho de 2021**. Resoluções enviadas fora do período especificado não serão consideradas na avaliação.
9. A resolução do Exame deverá ser enviada em **um único arquivo**, em **formato pdf**, cujo nome deverá ser o número do RA do(a) aluno(a). Por exemplo, se o número do RA for 123456, então o arquivo deverá ser 123456.pdf.
10. Cada aluno(a) deverá se certificar de que o arquivo com sua resolução seja **completamente legível**. Caso não disponha de um scanner para realizar a digitalização, utilize algum aplicativo de celular, como o Adobe Scan, por exemplo.
11. O Exame não deverá ser disponibilizado on-line, em nenhuma plataforma.

Questão 1: *(2,0 pontos)*

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$, e sejam

$$R = \sqrt{2\log\left(\frac{1}{1-X}\right)} \qquad \text{e} \qquad \Theta = (2Y-1)\pi.$$

(a) Determine a distribuição de R e a distribuição de Θ.

(b) Sejam $Z = R\cos\Theta$ e $W = R\,\mathrm{sen}\,\Theta$. Determine a distribuição de Z e a distribuição de W.

Questão 2: *(2,0 pontos)*

Seja X uma variável aleatória tal que $P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$. Suponha que $Y_1, Y_2, \ldots$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes de X tais que

$$P(Y_n = 1) = 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad P(Y_n = 0) = \frac{1}{n}.$$

Considere a sequência de variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$ definidas por

$$X_n = \begin{cases} X & \text{se } Y_n = 1, \\ e^n & \text{se } Y_n = 0. \end{cases}$$

(a) Discuta se $X_n \to X$ em probabilidade.

(b) Calcule $\lim_{n\to\infty} E\big(|X_n - X|\big)$.

Questão 3: *(2,0 pontos)*

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Para $n \geq 1$ inteiro, seja Y_n o comprimento da sequência de zeros iniciando em X_n, ou seja,

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{se } X_n = 1, \\ k & \text{se } X_n = 0,\, X_{n+1} = 0,\, \ldots,\, X_{n+k-1} = 0 \ \text{ e } X_{n+k} = 1, \ \text{ para } k \geq 1. \end{cases}$$

(a) Determine a função de probabilidade de Y_n.

(b) Calcule $P\big(Y_n = n \text{ infinitas vezes}\big)$.

(c) Calcule $P\big(Y_n = k \text{ infinitas vezes}\big)$, para $k \geq 0$ inteiro.

Questão 4: (*2,0 pontos*)

Discuta as afirmações a seguir, respondendo se cada uma delas é verdadeira ou falsa. Se a afirmação for verdadeira, dê uma prova. Se a afirmação for falsa, encontre um contra-exemplo.

(a) Se $X_n \to X$ quase certamente e $Y_n \to Y$ quase certamente, então $X_n + Y_n \to X + Y$ quase certamente.

(b) Se $X_n \to X$ em probabilidade e $Y_n \to Y$ em probabilidade, então $X_n + Y_n \to X + Y$ em probabilidade.

(c) Se $X_n \to X$ em probabilidade e $Y_n \to Y$ em probabilidade, então $X_n Y_n \to XY$ em probabilidade.

Questão 5: (*2,0 pontos*)

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com densidade

$$f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Para $n \geq 1$ inteiro, seja

$$Y_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n}\, X_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2}.$$

Encontre o limite em distribuição de Y_n.

Exame de Qualificação em Probabilidade

Instruções

1. A prova é **individual** e não é permitido trocar ideias ou conversar com colegas.
2. Durante o Exame, consultas aos membros da banca não serão permitidas.
3. Incluir uma folha de rosto com **somente** o nome, RA, assinatura, as referências bibliográficas consultadas durante a prova e o número total de páginas da prova.
4. O Exame é composto de vários exercícios. Eles devem ser tratados de forma clara e completa justificando apropriadamente as respostas de cada questão.
5. Os exercícios devem ser resolvidos em papel A4, legivelmente, à caneta ou a lápis escuro.
6. Comece cada exercício em uma folha separada; não é preciso copiar o enunciado.
7. O enunciado do Exame será enviado por e-mail a cada aluno(a) às 9 horas (horário de Brasília) do 01 de Fevereiro de 2021. O aluno deverá, em seguida, confirmar a boa recepção do Exame por e-mail aos endereços: *diegofb@unicamp.br* e *gallesco@unicamp.br*.
8. Cada aluno(a) deverá enviar o Exame resolvido até as 15 horas (horário de Brasília) do 01 de Fevereiro de 2021 em **um único arquivo em formato pdf** aos endereços *diegofb@unicamp.br* e *gallesco@unicamp.br*. O nome do arquivo de respostas deve conter o RA. Por exemplo se o RA é 123005, então o arquivo de respostas será 123005.pdf. Envios fora do período especificado não serão considerados na avaliação. Não haverá exceções.
9. Certifique-se de que o arquivo de respostas é **completamente legível**. Caso não disponha de um scanner, use um aplicativo no celular, como o Adobe Scan: *https://acrobat.adobe.com/br/pt/mobile/scanner-app.html*
10. O exame não deve ser disponibilizado on-line, em nenhuma plataforma.

Enunciado

Exercício 1:(3pts) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com densidade comum de Rayleigh com parâmetro $\theta > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta^2} \exp\left\{ -\dfrac{x^2}{2\theta^2} \right\}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a distribuição de $\sum_{i=1}^n X_i^2$.
(b) Qual é a distribuição de $U = \min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$? Como se chama essa distribuição?
(c) Calcule a distribuição de $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$.

Exercício 2:(2pts) Seja $\lambda > 0$. Para todo inteiro $n > \lambda$, definimos $(X_i^n)_{i \geq 1}$, uma sequência da variáveis aleatórias i.i.d. com lei Bernoulli com parâmetro $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Em seguida, para $n > \lambda$, consideramos a sequência de variáveis alatórias

$$N_n = \frac{1}{n} \inf\{i \geq 1 : X_i^n = 1\}.$$

Mostrar que $(N_n)_n$ converge em distribuição para uma lei a precisar.
(Dica: usar funções caraterísticas)

Exercício 3:(2pts) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, tendo distribuição comum $U[0,1]$.
(a) Qual é a densidade da variável aleatória $Z = X + Y$?
(b) Ache a probabilidade da equação quadrática $Xt^2 + Yt + Z = 0$ ter duas raízes reais distintas.

Exercício 4:(3pts) Consideramos um experimento tendo r resultados equiprováveis. Este experimento é repetido de maneira independente. Denotamos por A_n o evento: "durante as nr primeiras repetições, cada um dos r resultados ocorre exatamente n vezes". Quando o evento A_n ocorre, dizemos que há *compensação exata*.
(a) Calcular $P[A_n]$.
(b) Usando a fórmula de Stirling, obter um equivalente de $P[A_n]$ quando $n \to \infty$.
(c) Deduzir que se $r \geq 4$, só temos, quase certamente, um número finito de compensações exatas.