1	2	3	4	5	$\sum$

Exame Qualificação - Geometria Riemanniana

NOME:____ **RA:**________

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

Parte I. Escolha 2 (duas) das questões abaixo para resolver:

1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n e curvatura seccional constante κ. Mostre que
   (a) $\mathrm{Ric} = (n-1)\kappa g$;
   (b) $\mathrm{scal} = n(n-1)\kappa$.
2. Mostre que S^n com a métrica induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade de curvatura seccional constante igual a 1. Calcule, de forma rigorosa, as geodésicas desta variedade Riemanniana.
3. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n.
   (a) Considere $P_{c,t_0,t}\colon T_{c(t_0)}M \to T_{c(t)}\mathrm{M}$, tal que $P_{c,t_0,t}(v)$, $v \in T_{c(t_0)}M$, é o transporte paralelo de v ao longo de uma curva suave $c\colon I \to M$, tal que $t_0 \in I$. Mostre que $P_{c,t_0,t}$ é uma isometria.
   (b) Dado $p \in M$, mostre que existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores ortonormais $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$, de modo que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$.
4. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n orientada e $\nu \in \Omega^n(M)$ o elemento de volume induzido por g. Supondo que M é compacta e sem bordo, dada $f \in C^\infty(M)$, mostre que
$$\int_M \Delta f \nu = 0,$$
   onde $\Delta f = \mathrm{div}\, \mathrm{grad} f$, $\forall f \in C^\infty(M)$. Mostre que se f é uma função diferenciável em M, tal que $\Delta f \geq 0$, então f é constante.

Parte II. Escolha 3 (três) das questões abaixo para resolver:

1. Uma variedade Riemanniana (M, g) é dita homogênea se para quaisquer $p, q \in M$, existe uma isometria $f\colon M \to M$ de forma que $f(p) = q$. Mostre que toda variedade Riemanniana homogênea é completa.
2. (a) Defina isometria entre variedades Riemannianas; (b) Defina métrica Riemanniana completa; (c) Defina ponto conjugado em uma variedade Riemanniana; (d) Enuncie o Teorema do Índice de Morse para geodésicas.
3. Enuncie o Teorema de Comparação de Rauch. Mostre que se (M, g) é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não-positiva, então
$$|(d\exp_p)_v(w)| \geq |w|,$$
   $\forall p \in M$, $\forall v \in T_pM$ e $\forall w \in T_v(T_pM)$.
4. Enuncie o Teorema de Bonnet-Myers. Dê um exemplo de uma variedade Riemanniana completa não-compacta com curvatura seccional $K > 0$. Isso contradiz o Teorema de Bonnet-Myers? Justifique sua resposta.
5. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não-positiva. Prove que, $\forall p \in M$, o lugar dos pontos conjugados $C(p)$ é vazio.

1	2	3	4	5	$\sum$

Exame Qualificação - Grupos de Lie

NOME:____ **RA:**____________

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

Parte I. Escolha 2 (duas) das questões abaixo para resolver:

1. Sejam G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo. Mostre que a topologia quociente em G/H é Hausdorff se, e somente se, H é fechado.
2. Sejam $\phi, \psi\colon G \to H$ homomorfismos de grupos topológicos, tais que $\phi|_V = \psi|_V$, para alguma vizinhança V da identidade. Mostre que se G for conexo, então $\phi = \psi$.
3. Sejam G um grupo topológico e $G_0 \subset G$ a componente conexa da identidade de G. Mostre que G_0 é um subgrupo normal de G.
4. Seja G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo. Mostre que se H e G/H forem compactos, então G é compacto.

Parte II. Escolha 3 (três) das questões abaixo para resolver:

1. Seja $\phi\colon G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Mostre que o gráfico de ϕ é um subgrupo de Lie de $G \times H$ e encontre sua álgebra de Lie.
2. Enuncie o teorema de Cartan. Mostre que o subconjunto
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\},$$
é um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
3. Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dado um ideal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, mostre que $H = \langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle$ é um subgrupo normal de G. Supondo G simplesmente conexo, mostre que H é fechado.
4. Considere o subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ definido por
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$
   (a) Determine a álgebra de Lie de H;
   (b) Denotando por $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie de H, mostre que $\exp\colon \mathfrak{h} \to H$ é um difeomorfismo.
5. Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e
$$Z(G_0) = \{ g \in G \mid \forall h \in G_0,\ gh = hg \}$$
o centralizador da componente conexa da identidade G_0 de G. Mostre que $Z(G_0) = \ker(\mathrm{Ad})$, onde $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ é a representação adjunta de G.

Exame de Qualificação

MM425 - Análise Funcional

24 de Julho de 2023

Nome:____ **RA:**____________

1. Demonstre as seguintes afirmações ou exiba um contra-exemplo:
   (a) Considere X um espaço vetorial normado e $x, y \in X$. Se $\langle f, x\rangle_{X^*,X} = \langle f, y\rangle_{X^*,X}$ para todo $f \in X^*$ então $x = y$.
   (b) Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores lineares limitados de X em Y. Se X é Banach e $T_n x \to Tx$, para todo $x \in X$, então existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Seja X um espaço de Banach separável. Então X^* é separável.

2. Sejam X um espaço vetorial normado e M um subespaço vetorial de X. Use o teorema de Hahn-Banach (ou algum de seus corolários) para provar que M é fechado com respeito a topologia forte de X se e somente se M é fechado com respeito a topologia fraca $\sigma(X, X^*)$.

3. (a) Enuncie o Teorema do Gráfico Fechado.
   (b) Com a ajuda de um exemplo, demostre que as hipóteses deste teorema não podem ser enfraquecidas.
   (c) Sejam X um espaço de Banach e $T : X \to X^*$ um operador linear tal que
   $$\langle Tx, y\rangle_{X^*,X} = \langle Ty, x\rangle_{X^*,X}, \text{ para todo } x, y \in X.$$
   Mostre que T é limitado.

4. Sejam H um espaço de Hilbert e $\{x_n\}$ uma sequência em H. Mostre que x_n converge fortemente a x em H se, e somente se, x_n converge fracamente a x em H e $\|x_n\|_H \to \|x\|_H$.

5. Considere o operador $T : l_p \to l_p$, $1 \leq p \leq \infty$, definido por
   $$T((x_n)_n) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots)$$
   onde $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ é uma sequência que converge a zero. Determine $\sigma(T)$, ou seja, o espectro de T.

Universidade Estadual de Campinas
IMECC
Departamento de Matemática

MM 439 - Álgebras de Lie
Exame de Qualificação de Doutorado
Campinas, 28 de julho de 2023
Período: 2023.1

Nome do Aluno(a): ______________________________

Respostas que não estiverem acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas. As álgebras de Lie aqui consideradas estão sobre o corpo dos complexos e são de dimensão finita.

Questão 01: Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa justificando cada uma de suas respostas.

(a) (1 pt) Toda álgebra de Lie solúvel é nilpotente.

(b) (1 pt) Toda álgebra de Lie redutiva tem uma única decomposição de Levi.

(c) (1 pt) Seja Φ um sistema de raízes. Se α, $\beta \in \Phi$ são tais que $\alpha - \beta \in \Phi$, então $(\alpha, \beta) > 0$.

(d) (1 pt) Seja $\varphi\colon L_1 \to L_2$ um homomorfismo entre álgebras de Lie. Se H é uma subálgebra de Cartan de L_1, então $\varphi(H)$ é uma subálgebra de Cartan de $\varphi(L_2)$.

Questão 02:

(a) (0,5 pt) Enuncie o resultado chamado "critério de Cartan".

(b) (1 pt) Seja L um espaço vetorial tridimensional com base $\{x, y, z\}$. Mostre que existe única estrutura de álgebra de Lie em L satisfazendo $[x, y] = z$, $[x, z] = y$ e $[y, z] = 0$.

(c) (0,5 pt) Use o critério de Cartan para concluir que a álgebra definida no item anterior é solúvel.

Questão 03:

(a) (0,5 pt) Definir álgebra universal envolvente $U(L)$ de uma álgebra de Lie L. Enunciar o teorema de Poincaré, Birkhoff e Witt.

(b) (0,5 pt) Mostre que se L_1 e L_2 são álgebras de Lie e L_2 é imagem homomórfica de L_1, então $U(L_2)$ é imagem homomórfica de $U(L_1)$.

(c) (1 pt) Se L é uma álgebra de Lie de dimesão 2, com base a e b tais que $[a, b] = a$, descreva uma base para $U(L)$. Neste caso, mostre que o homomorfismo canônico $i\colon L \to U(L)$ é injetivo (tal homomorfismo vem da definição de álgebra universal envolvente).

Questão 04: Seja E um espaço vetorial euclidiano e de dimensão finita.

(a) (0,5 pt) Definir um sistema de raízes Φ em E. Definir um sistema de raízes irredutível.

(b) (1,5 pt) Seja L uma álgebra de Lie semisimples com subalgebra de Cartan H e sistema de raízes Φ. Mostre que se L é simples se, e somente se, Φ é irredutível.

Boa Prova!