Exame de qualificação de Mestrado - Análise no $\mathbb{R}^n$ - 08/03/2021

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $|f'(t)| \leq k < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Defina $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Mostre que φ é um difeomorfismo.

2. Dado $R > 0$ considere $S_R = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = R\}$ a esfera de centrada na origem de raio R. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que f restrita a S_R é constante para todo $R > 0$ se, e somente se, existe $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $\text{grad} f(x) = g(x) \cdot x$.

3. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma função de classe C^k com $k \geq 1$ e U aberto. Mostre que se para todo $x \in U$ vale que

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \neq 0, \quad \text{onde} \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

então para todo $x \in U$ admite vizinhança $W \subset U$ tal que $f(W)$ é o gráfico de uma função $y_{n+1} = \varphi(y_1, \ldots, y_n)$ de classe C^k.

4. Seja $f : U \to U$ de classe C^k, $k \geq 1$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo. Se $f \circ f = f$ prove que f tem posto constante numa vizinhança de $M = f(U)$. Conclua que M é uma superfície de classe C^k.

5. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $D \subset U$ uma superfície m-dimensional, compacta, orientável e de classe C^3. Prove que se $f|_{\partial D} \equiv 0$ então $\int_D \det f'(x) = 0$.

Boa Prova!

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$

Prova de Topologia Geral – MM-453

10 de março de 2021

NOME:____ **RA:**________________________________.

Responda a **quatro** das questões abaixo e marque com $\times$ no quadro acima aquelas que excluir.

1. Seja $l_\infty = \{(x_j)_{j=1}^{\infty},\ x_j \in \mathbb{R},\ \sup ||x_j|| < \infty\}$, com a norma $||(x_j)_{j=1}^{\infty}|| = \sup_j ||x_j||$.
   (a) (10 pontos) l_∞ é um espaço de Banach? Justifique.
   (b) (15 pontos) Mostre que l_∞ não é separável.

2. Essa questão é sobre espaços de Hausdorff.
   (a) (05 pontos) Defina espaço topológico de Hausdorff.
   (b) (10 pontos) Elabore um exemplo justificado de espaço topológico que não seja de Hausdorff.
   (c) (10 pontos) Sejam X um espaço topológico e Y um espaço de Hausdorff compacto. Mostre que uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e só se, $G = \{(x, f(x)),\ x \in X\}$ é um subconjunto fechado de $X \times Y$.

3. Essa questão é sobre conjuntos compactos.
   (a) (05 pontos) Mostre que se $f : X \to Y$ é contínua e $K \subset X$ é compacto, então $f(K)$ é compacto.
   (b) (10 pontos) Mostre que em $\mathbb{R}^n$, um conjunto K é compacto se, e só se, é limitado e fechado.
   (c) (10 pontos) Elabore um exemplo justificado de conjunto compacto K que não é fechado.

4. A topologia quociente é uma importante ferramenta para estudar quocientes de espaços topológicos.
   (a) (05 pontos) Defina a topologia quociente.
   (b) (10 pontos) Mostre que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é homeomorfo a S^1.
   (c) (10 pontos) Considere em $\mathbb{R}^2$ a relação de equivalência
   $$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2.$$
   Prove que $\mathbb{R}^2/\sim$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

5. Seja X um espaço topológico.
   (a) (10 pontos) Mostre que se X é conexo por caminhos, então o grupo fundamental de X não depende do ponto base. Para $n \geq 1$, determine $\pi_1(\mathbb{R}^n)$.
   (b) (10 pontos) Se $n \geq 2$, mostre que todo laço $f : [0,1] \to S^n$ em x_0 é homotópico a um laço em x_0 que não é sobrejetor.
   (c) (05 pontos) Mostre que $\pi_1(S^2)$ é trivial.

6. Seja $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento.
   (a) (15 pontos) Mostre que se X é compacto e $p^{-1}(x)$ é finito para todo $x \in X$, então $\widetilde{X}$ é compacto.
   (b) (10 pontos) Ilustre o resultado anterior com um exemplo.

1	2	3	4	5	$\sum$

MM719 - Exame de Qualificação– 12/03/2021

Nome:____ **Turma:** **RA:**__________

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas!

1) (15 pt.) Dada a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontre a forma de Jordan de A e uma base de Jordan para a mesma.

2) (20 pt.) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ com $\dim_{\mathbb{Q}}(V) < \infty$ e seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T^2 = -Id$. Suponha que V contenha um subespaço $T-$invariante W que seja próprio e não nula.

   (a) Ache o polinômio mínimo de T

   (b) Demonstre que a menor possível dimensão tal espaço tem der ser 4.

3) (15 pt.) Seja $T : V \to V$ um operador $\mathbb{Q}$-linear injetor, $\dim_{\mathbb{Q}}(V) < \infty$, $\varphi \in B_{as}(V)$ não degenerada tal que $\text{Im}(T)$ seja não degenerado. Demonstre que $T_{\varphi}^{\varphi} \circ T : V \to V$ é isomorfismo.

4) (20 pt.) Sejam W_1 e W_2 $\mathbb{Q}$-subespaços vetoriais de V com bases $\alpha = \{v_1, \cdots, v_k\} \subseteq W_1$ e $\beta = \{w_1, \cdots, w_k\} \subseteq W_2$. Demonstre que $W_1 = W_2$ se e somente se existe $c \in \mathbb{Q}$ não nulo tal que

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = c(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k).$$

5) (30 pt.) Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) Se (φ, U) é um produto tensorial dos espços vetoriais $V_1, \cdots, V_k$, então φ é um mapa sobrejetor.

   (b) Se $v_1, \cdots, v_k$ vetores linearmente independentes de V e $w_1, \cdots, w_k$ vetores de W são tais que $\text{posto}(v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_k \otimes w_k) = 0$, então $w_i = 0$ para todo $i = 1, \cdots, k$.

   (c) Se V_1, V_2, W_1, W_2 são $\mathbb{F}-$espaços com dimensão finita e $T_i \in \text{Hom}(V_i, W_i)$, então $\text{posto}(T_1 \otimes T_2) = \text{posto}(T_1) + \text{posto}(T_2)$.

Boa Prova!