IMECC/Unicamp – Programa de Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação ao Mestrado (julho de 2019)
Disciplina: MM720 - Análise no $\mathbb{R}^n$

Nome: ____

******************* PRIMEIRA PARTE *******************
************ Faça três questões dentre as abaixo. ************

1. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   A função f é contínua? Tem derivadas parciais na origem? É diferenciável?

2. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz simétrica e defina a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle Ax, x\rangle$.
   (a) Mostre que f é diferenciável e calcule $f'(x)$.
   (b) Exiba os pontos críticos de f.
   (c) Determine o maior valor de $f|_{S^{n-1}}$ no caso em que $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com $f(2,-1) = -1$. Defina

$$\begin{cases} G(x,y,u) = f(x,y) + u^2, \\ H(x,y,u) = ux + 3y^3 + u^3. \end{cases}$$

   (a) Encontre $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} G(x,y,u) = 0, \\ H(x,y,u) = 0, \end{cases}$$

   tem solução $(x,y,u) = (2,-1,\alpha)$.
   (b) Sob quais condições existem funções $x = g(y)$ e $u = h(y)$, de classe C^1 e definidas em abertos de $\mathbb{R}$ tais que $G\big(g(y), y, h(y)\big) = 0$ e $H\big(g(y), y, h(y)\big) = 0$ com $g(-1) = 2$ e $h(-1) = \alpha$? Enuncie detalhadamente todos os teoremas necessários.
   (c) Nas condições encontradas em (b), supondo $Df(2,-1) = (1,-3)$, encontre $g'(-1)$ e $h'(-1)$. Enuncie detalhadamente todos os teoremas necessários.

4. Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma subvariedade (mergulhada) de classe C^r que não contém a. Mostre que se $p \in M$ é o ponto mais próximo de a então $p - a$ é normal a M.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos(x)}{2} & , \quad x \in [-\pi, \pi], \\ 0 & , \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Seja $\{\phi_j\}_{j\geq 0}$ a família de funções dada por $\phi_{2m+1}(x) = f(x - m\pi)$ e $\phi_{2m}(x) = f(x + m\pi)$. Por exemplo, $\phi_3(x) = f(x-\pi)$ e $\phi_4(x) = f(x + 2\pi)$.
   (a) Defina partição da unidade associada a uma coleção de abertos de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Mostre que $\{\phi_j\}_{j\geq 0}$ é uma partição da unidade em $\mathbb{R}$.

****************** SEGUNDA PARTE ******************

************** Faça as duas questões abaixo. **************

6. Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4,\ y \geq 0\}$ e $\omega = y\,dx + 3x\,dz$.
   (a) Calcule $\int_{\partial M} \omega$ diretamente (sem utilizar o Teorema de Stokes).
   (b) Calcule $\int_M d\,\omega$.

7. Decida se cada afirmação é verdadeira ou falsa, apresentando uma breve demonstração ou um contra-exemplo, conforme o caso.

   (a) O sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) &= x(t)^3 + (x(t))^5, \\ \dfrac{d}{dt}y(t) &= y(t) + (y(t))^7, \end{cases} \tag{1}$$

   definido em $\mathbb{R}^2$ admite soluções periódicas com período $T > 0$.
   Dica: uma solução periódica do sistema acima é uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ fechada que satisfaz o sistema.

   (b) Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, toda forma fechada de classe C^1 em U é exata.

   (c) Se $f : U \to \mathbb{R}$ é harmônica (f é C^2 e $f_{xx} + f_{yy} = 0$ no aberto U) e todos os pontos críticos são não-degenerados então f obrigatoriamente tem um máximo local.

   (d) Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde $A = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \neq 0\}$. Se f é diferenciável e as derivadas parciais se anulam em todo $x \in A$ então f é constante.

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

Exame de Qualificação em Topologia Geral - MM 453

Julho, 2019

RA:

1	2	3	4	5	6	7	8	Total

Instruções:

- ATENÇÃO: Faça **cinco** questões sendo **pelo menos** uma delas da parte B desta avaliação;
- Coloque o seu RA em **TODAS** as folhas;
- Escreva de forma clara os argumentos utilizados;
- Esta avaliação é individual e não é permitido o uso de qualquer tipo de material de consulta. Tentativas, bem sucedidas ou não, de cola implicarão na reprovação do(a) aluno(a);
- Não escreva no quadro de pontuação acima;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.
- Indique abaixo quais questões você escolheu.

Questões escolhidas:

Parte A:

Problema 1: (2.0) Sejam X e Y espaços topológicos. Seja $f : X \to Y$ uma função com Y Hausdorff compacto. Mostre que f é contínua se, e somente se, o gráfico de f,

$$G_f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

é fechado em $X \times Y$.

Problema 2:

a) (1.0) Seja X um espaço compacto e $A \subset X$ um subconjunto fechado, mostre que A é compacto.

b) (1.0) Mostre que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, for fechado e limitado.

Problema 3: (2.0)

a) (1.0) Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Mostre que se C é um subespaço conexo de X com
$$A \cap C \neq \emptyset \quad \text{e} \quad (X - A) \cap C \neq \emptyset,$$
então
$$C \cap \partial A \neq \emptyset.$$

b) (1.0) Seja $\mathbb{R}_l$ o conjunto dos reais munido da topologia do limite inferior. Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$.

Problema 4: (2.0) Mostre que X é um espaço de Hausdorff localmente compacto se, e somente se, existe um espaço Y satisfazendo as seguintes condições:

i) X é subespaço de Y

ii) $Y - X$ é um conjunto consistindo de apenas um ponto

iii) Y é um espaço de Hausdorff compacto.

Parte B:

Problema 5: (2.0) Seja X um espaço normal e sejam A e B conjuntos fechados disjuntos em X. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, mostre que existe uma função contínua $f : X \to [a, b]$ tal que
$$A \subset f^{-1}(\{a\}), \quad B \subset f^{-1}(\{b\}).$$

Problema 6: (2.0)

a) (1.0) Prove que todo filtro está contido em um ultrafiltro.

b) (1.0) Enuncie e demonstre o Teorema de Tychonoff.

Problema 7:

a) (1.0) Seja $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento e seja B um espaço conexo. Mostre que se $p^{-1}(b_0)$ tem k elementos para algum $b_0 \in B$ então $p^{-1}(b)$ possui exatamente k elementos para todo $b \in B$.

b) (1.0) Seja $p : E \to B$ uma aplicação de recobrimento, $b_0 \in B$ e $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ fixados. Denote por
$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$
a correspondência de levantamento induzida por p e com respeito aos pontos b_0 e e_0. Mostre que se E for simplesmente conexo então ϕ será bijetora.

Problema 8: (2.0) Considere G um grupo topológico, ou seja, G é um espaço topológico que possui uma operação $\cdot : G \times G \to G$ com a qual $(G, \cdot)$ é um grupo e as aplicações:

$$(x, y) \mapsto x \cdot y \quad \text{e} \quad x \mapsto x^{-1}$$

são contínuas. Seja $x_0 \in G$ o elemento neutro de G mostre que $\pi_1(G, x_0)$ é um grupo comutativo.

Boa prova !!!

EQM Álgebra Linear 17 de julho de 2019

Nome: R.A.:

Exercício 1. *(4pt) Considerando as afirmações abaixo, responda* **falso** *ou* **verdadeiro***, dando uma justificativa para cada resposta.*

1. *Todo espaço vetorial é isomorfo ao seu dual;*
2. *Um isomorfismo entre um espaço V e seu dual V^* é equivalente a um produto interno não degenerado (mas não necessariamente positivo definido);*
3. *Dado um espaço com produto interno (V, g), todo subespaço $L \subset V$ possui complemento ortogonal $V^\perp$ tal que $V \cap V^\perp = \emptyset$;*
4. *O produto tensorial entre dois espaços, $V \otimes W$, pode ser visto como o espaço de funcionais bilineares de $V^* \times W^*$.*

Exercício 2. *(2pt) Mostre que se dois operadores auto-adjuntos comutam então existe uma base que os diagonaliza simultaneamente.*

Exercício 3. *(2pt) Dada a seguinte matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontre a forma de Jordan de A e uma base de Jordan para a mesma.

Exercício 4. *(2pt) Seja V um espaço vetorial de dimensão n, seja $\Lambda^k V$ a k-ésima potência exterior de V e seja $T : V \to V$ uma transformação linear de V. Explique como definimos uma transformação linear induzida $\tilde{T} : \Lambda^k V \to \Lambda^k V$.* **Utilize esta informação** *para definir, de modo independente de base, o determinante de uma transformação linear.*