Departamento de Matemática - IMECC - UNICAMP
Exame de Qualificaçõ de Análise no $\mathbb{R}^n$ - 20/02/2019

Nome: ____ **RA:** ________________

Questão 1. (2,0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação continuamente diferenciável em uma vizinhança de um ponto x_0. Mostre que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < (\|f'(x_0)\| + \varepsilon)|x - y|, \quad \forall\, x, y \in B_\delta(x_0),$$

onde $|\cdot|$, $\|f'(x_0)\|$ denotam, respectivamente, a norma euclidiana e a norma do operador linear $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, e $B_\delta(x_0)$ é a bola euclidianda de centro x_0 e raio δ. *Sugestão*: considere a função $g(x) = f(x) - f'(x_0)x$.

Questão 2. (2,0 pontos) Dados $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ e $p, q \in \mathbb{R}$ positivos tais que $1/p + 1/q = 1$, sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad g(x, y) = xy.$$

(a) Sejam $c > 0$ (uma constante positiva arbitrária) e (x_c, y_c) o ponto de mínimo da função f restrita à curva definida pela equação $g(x, y) = c$. Usando multiplicadores de Lagrange, mostre que $x_c^p = y_c^q$.

(b) Usando o item (a), mostre que $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}, \quad \forall\, x, y \geq 0.$

Questão 3. (2,0 pontos)

(a) Mostre que se $m < n$ então o $\mathbb{R}^m$ visto como um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ tem medida nula.

(b) Mostre que se U é um aberto do $\mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação lipschitziana e $m < n$, então a imagem $f(U)$ tem medida nula (em $\mathbb{R}^n$). Conclua que toda hiperfície de classe C^1 do $\mathbb{R}^n$ tem medida nula.

Questão 4. (2,0 pontos) Sejam A um aberto do $\mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma imersão de classe C^k, $k \geq 1$. Mostre que para todo ponto $a \in A$ existe um aberto $U \subset A$ contendo a tal que $f|U : U \to f(U)$ é um homeoformismo e $(f|U)^{-1}$ é a restrição de uma aplicação de classe C^k definida num aberto em $\mathbb{R}^{m+n}$.

Questão 5. (2,0 pontos)

(a) Enuncie o Teorema de Stokes na sua forma mais geral (em variedades).

(b) Use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\int_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot dS$, onde $\vec{F} = z^2\vec{i} - 3xy\vec{j} + x^3y^3\vec{k}$ e S é a parte da superfície dada por $z = 5 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 1$. Suponha que S está orientada com o vetor normal apontando para fora.

EQ Topologia Geral - 22 de fevereiro de 2019

Nome: R.A.:

Exercício 1. *(***Obrigatório** *4pt) Responda falso ou verdadeiro dando demonstrações e contra-exemplos como justificativa:*

a *Todo conjunto compacto é fechado;*

b *O círcúlo S^1 e o intervalo $[0,1)$ são homeomorfos;*

c *Uma função $f : X \to S^n$ não sobrejetora é homotópica a função constante, independentemente do espaço X;*

d *Todo espaço métrico é Hausdorff.*

Escolha 3 dos exercícios abaixo para resolver.

Exercício 2. *(2pt) Mostre que toda função contínua no disco, $f : D^2 \to D^2$, possui ponto fixo.*

Exercício 3. *Sejam X e Y espaços topológicos com Y Hausdorff e sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ é fechado.*

Exercício 4. *Usando apenas resultados de topologia (sem ϵ e δ), mostre que toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui máximo e mínimo.*

Exercício 5. *Usando apenas resultados de topologia (sem ϵ e δ), enuncie e demonstre o teorema do valor intermediário de cálculo*

Exercício 6. *Calcule o grupo fundamental de S^2.*

MM719 - Exame de Qualificação

Nome: ____ RA: __________ 25/02/2019

Escolher itens cujo total de pontos possíveis não ultrapasse 10,5 (existem 12 pontos disponíveis). Salvo menção em contrário, V denota um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. **Respostas sem justificativas serão desconsideradas (contas são justificativas)**. Bom trabalho!

1. Seja T um operador linear em $\mathbb{R}^4$ cuja matriz com respeito a alguma base seja $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) (1,0) Ache a correspondente decomposição primária de $\mathbb{R}^4$ e o polinômio mínimo de T.

   (b) (1,0) Ache uma base de Jordan com respeito a T.

   (c) (1,0) Ache uma decomposição cíclica de $\mathbb{R}^4$ com respeito a T.

   (d) (0,5) Ache a forma racional de T.

2. Suponha que $\dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$ e que $T : V \to V$ seja $\mathbb{F}$-linear.

   (a) (1,0) Sejam $u_1, u_2 \in V$ tais que $C_T(u_1) \cap C_T(u_2) = \{0_V\}$ e $w = u_1 + u_2$. Mostre que $m_{T,w} = MMC(m_{T,u_1}, m_{T,u_2})$, onde MMC denota o mínimo múltiplo comum de dois polinômios.

   (b) (0,5) Mostre que a afirmação anterior não é verdadeira se só supormos que u_1 e u_2 sejam linearmente independentes.

3. (1,0) Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V com bases $\alpha = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq W_1$ e $\beta = \{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq W_2$. Demonstre que $W_1 = W_2$ se e somente se existe $c \in \mathbb{F}$ não nulo tal que

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k = c(w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_k)$$

4. Sejam $V = \mathbb{R}^5$, α sua base canônica e φ uma forma bilinear em V cuja matriz com respeito a α seja
$${}_{\alpha}[\varphi]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) (1,0) Verifique que φ é degenerada e ache o subespaço $V^{\perp_\varphi}$.

   (b) (1,0) Escolha um subespaço W complementar a $V^{\perp_\varphi}$ e ache uma base hiperbólica β de W.

   (c) (0,5) Encontre a matriz ${}_{\delta}[\varphi]_{\delta}$ com relação à base $\delta = \beta \cup \gamma$, sendo γ uma base de $V^{\perp_\varphi}$.

5. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) (1,0) Se $\dim_{\mathbb{F}}(V) > 2$, existe $T : S^2(V) \to \Lambda^2(V)$ linear injetora.

   (b) (1,0) Suponha que $\dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$ e que φ seja forma bilinear simétrica ou alternada em V. Se W é subespaço de V tal que $\mathrm{Rad}(W) = \{0\}$, então $\det({}_{\alpha}[\varphi]_{\alpha}) \neq 0$ para qualquer base α de W.

   (c) (1,0) Seja W um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e suponha que $v_1, \ldots, v_k \in V$ sejam linearmente independentes e $w_1, \ldots, w_k \in W$ são tais que $\mathrm{posto}(v_1 \otimes w_1 + \ldots + v_k \otimes w_k) = 0$. Então $w_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

   (d) (1,0) Se $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, então V^* é isomorfo a $V_1^* \oplus V_2^* \oplus \cdots \oplus V_m^*$.