1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$

Exame de Geometria Riemanniana – MM-423

10 de março de 2021

NOME:______________________________________ **RA:**______________________________________.

Responda a **quatro** das questões abaixo e marque com $\times$ no quadro acima aquelas que excluir.
Todos os objetos geométricos mencionados são presumidos *suaves*, salvo menção em contrário.

1. Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana.
   (a) [10 pontos] Denote $\sqrt{g} := \sqrt{\det g}$ e $g^{ij} := (g^{-1})^{ij}$ as entradas da matrix inversa de g em uma carta $(\mathcal{U}, x)$. Determine $\sqrt{\tilde{g}}$ e as entradas $\tilde{g}^{\tilde{i}\tilde{j}}$ em uma nova carta $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{x})$, com $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$.
   (b) [05 pontos] O *gradiente* de uma função $f \in C^\infty(M)$ é definido localmente por
   $$(\mathrm{grad} f)^i := \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$
   Mostre que $\mathrm{grad} f$ é um campo de vetores em M.
   (c) [10 pontos] A *divergência* de um campo de vetores $V \in \mathscr{X}(M)$ é definida localmente por
   $$\mathrm{div} V := \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(V^i \sqrt{g} \right).$$
   Mostre que a definição da divergência não depende da escolha de coordenadas.

2. Seja $\mathbf{S}^n$ a esfera unitária em $M = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Dado $x \in M$, definimos $r = |x|$ e $\hat{x} = \frac{1}{r} x \in \mathbf{S}^n$.
   (a) [05 pontos] Uma carta local $(\mathcal{U}, \omega)$ em torno de $\hat{x} \in \mathbf{S}^n$ induz naturalmente uma carta de *coordenadas polares* $(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}, (r, \omega))$ em $M \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbf{S}^n$. Determine a matriz jacobiana $\frac{\partial x}{\partial (r,\omega)}$.
   (b) [05 pontos] Sejam $\bar{g}$ a métrica euclidiana em M e $g_{\mathrm{s}} := \bar{g}|_{\mathbf{S}^n}$ a *métrica redonda* induzida em $\mathbf{S}^n$. Mostre que
   $$\bar{g} = \begin{pmatrix} r^2 g_{\mathrm{s}} & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sqrt{\bar{g}} = r^n \sqrt{g_{\mathrm{s}}}, \quad \text{com} \quad \sqrt{g} := \sqrt{\det g}.$$
   (c) [05 pontos] Definimos o *laplaciano* (de funções) por $\Delta := \mathrm{div} \circ \mathrm{grad} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. Obtenha a expressão do laplaciano de $(M, \bar{g})$ em coordenadas polares, em termos do laplaciano em $(\mathbf{S}^n, g_{\mathrm{s}})$:
   $$\Delta_{\bar{g}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{g_{\mathrm{s}}}.$$
   (d) [10 pontos] Dada $h \in C^\infty(\mathbf{S}^n)$, seja $\bar{h} \in C^\infty(M)$ sua extensão radial, $\bar{h}(x) := h(\hat{x})$. Dado $k \in \mathbf{N}$, mostre que uma função da forma $r^k \bar{h}$ é $\bar{g}$-harmônica se, e somente se, h é autofunção de $\Delta_{g_{\mathrm{s}}}$:
   $$r^\mu \bar{h} \in \ker \Delta_{\bar{g}} \Leftrightarrow h \in \ker(\Delta_{g_{\mathrm{s}}} - \lambda \mathrm{I}), \quad \text{com} \quad \lambda = k(k+n-1).$$

3. (a) [10 pontos] Enuncie a *fórmula da primeira variação*, definindo todos os conceitos relevantes.
   (b) [15 pontos] Dado um ponto q em uma esfera geodésica de centro p, mostre que a geodésica radial é a única curva minimizante de p a q.

4. (a) [10 pontos] Defina *completude riemanniana* e *completude geodésica*.
   (b) [15 pontos] Prove que a completude riemanniana implica a completude geodésica.

5. Sejam $(M, g) \hookrightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ um mergulho isométrico, com segunda forma fundamental II, e $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ campos vetoriais e $N \in \mathcal{N}(M)$ um campo normal localmente estendidos a $\bar{M}$.
   (a) [10 pontos] Demonstre a *fórmula de Gauss*: $\quad \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y)$.
   (b) [05 pontos] Demonstre a *fórmula de Weingarten*: $\quad \langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = \langle N, \mathrm{II}(X, Y) \rangle, \quad \text{com} \quad \langle .,. \rangle = g = \bar{g}|_M$.
   (c) [10 pontos] Mostre que $M \hookrightarrow \bar{M}$ é totalmente geodésica se, e somente se, $\mathrm{II} = 0$.

6. (a) [05 pontos] Defina *pontos conjugados*.
   (b) [20 pontos] Mostre que dois pontos na esfera S^n são conjugados se, e somente se, são antípodas.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$

Prova de Grupos de Lie – MM-448

10 de março de 2021

NOME:____ **RA:**____________________________________.

Responda a **quatro** das questões abaixo e marque com $\times$ no quadro acima aquelas que excluir.

1. Seja G o grupo de Heisenberg, isto é, o grupo de Lie das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   (a) (05 pontos) Determine $Z(G)$.

   (b) (10 pontos) Descreva os subgrupos de Lie conexos de G, e mostre que são todos fechados.

   (c) (10 pontos) Descreva as órbitas das representações adjunta e co-adjunta de G.

2. Faça o que se pede:

   (a) (05 pontos) $U(n)$ é difeomorfo a $SU(n) \times S^1$? Justifique.

   (b) (10 pontos) Mostre que $U(n)$ não é isomorfo a $SU(n) \times S^1$ (como grupo de Lie).

   (c) (10 pontos) Mostre que $SU(n) \times S^1$ é um recobrimento de n folhas de $U(n)$.

3. Nesta questão nós vamos abordar o Teorema de Cartan.

   (a) (10 pontos) Enuncie o Teorema de Cartan.

   (b) (15 pontos) Seja $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e considere $H < GL(2, \mathbb{C})$ o subgrupo das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{ita} \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

   O subgrupo H é um grupo de Lie? Justifique.

4. Nesta questão, falaremos um pouco sobre grupos conexos.

   (a) (10 pontos) Determine todos grupos de Lie conexos de dimensão, a menos de isomorfismo.

   (b) (15 pontos) Mostre que a variedade diferenciável $\mathbb{R}^2$ admite exatamente duas estruturas de grupo de Lie.

5. Uma ferramenta importante em grupos de Lie é a aplicação exponencial.

   (a) (05 pontos) Defina a aplicação exponencial em um grupo de Lie.

   (b) (10 pontos) A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})$ é sobrejetiva? Justifique.

   (c) (10 pontos) Mostre que se G é um grupo de Lie conexo com $\dim G = 2$ então a aplicação exponencial é uma aplicação de recobrimento. Dê um exemplo.

6. (25 pontos) Explicite a forma de Cartan-Killing para $\mathfrak{su}(2)$.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$

Exame de Introdução à Topologia Algébrica – MM-447

10 de março de 2021

NOME:____ **RA:**________________________________.

Responda a **quatro** das questões abaixo e marque com $\times$ no quadro acima aquelas que excluir.
Todos os mapas mencionados são presumidos *contínuos*, salvo menção em contrário.

1. (a) [15 pontos] Determine completamente a homologia $H_\bullet(\mathbb{R}P^4, \mathbb{R})$.
   (b) [10 pontos] Podemos concluir que $\mathbb{R}P^4$ é contrátil? Justifique.

2. (a) [20 pontos] Para quais valores de $n \in \{1, 2\}$ podemos garantir a existência de $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ sem pontos fixos?
   (b) [05 pontos] Dado $m \geq 1$, o mostre que um mapa $f : S^m \to S^m$ sem pontos fixos é homotópico à aplicação antípoda.

3. [25 pontos] Construa um espaço X satisfazendo $H_5(X, \mathbb{R}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$.

4. Seja $X = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.
   (a) [05 pontos] Mostre que X é homeomorfo à garrafa de Klein.
   (b) [10 pontos] Determine a homologia $H_\bullet(X, \mathbb{R})$.
   (c) [10 pontos] Determine $\pi_2(X)$.

5. Considere o espaço $X = S^2 \vee S^3$. Determine os seguintes invariantes:
   (a) [05 pontos] $\pi_1(X)$.
   (b) [05 pontos] $\pi_2(X)$.
   (c) [15 pontos] $H_\bullet(X, \mathbb{Z}_3)$.

6. (a) [15 pontos] Considere a fibração $F \cdots E \to B$ tal que a inclusão da fibra $F \to E$ seja homotópica à aplicação constante. Mostre que $\pi_n(B) \simeq \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F)$.
   (b) [10 pontos] Mostre que $\pi_7(S^4)$ e $\pi_{15}(S^8)$ possuem subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}$.

MM 439, Álgebras de Lie
Exame de Qualificação ao Doutorado

Março de 2021

As álgebras de Lie são consideradas sobre o corpo dos complexos, e de dimensão finita. TODAS AS RESPOSTAS DEVEM SER JUSTIFICADAS.

1. a) (0,5 pt) Se L é uma álgebra de Lie nilpotente, mostrar que L tem um ideal M tal que $\dim L = 1 + \dim M$.

b) (1 pt) Nas notações de (a), seja $x \in L$ tal que $L = M \oplus \mathbb{C}x$, soma direta de espaços vetoriais. Mostrar que a transformação linear $D\colon L \to L$ tal que $D(M) = 0$, e $D(x) = z$, onde $z \in C = C(L)$, o centro de L, é uma derivação de L.

c) (1 pt) Nas notações de (a) e (b), seja n um número natural tal que $C \subseteq L^n$ e $C \not\subseteq L^{n+1}$. Mostrar que se $z \notin L^{n+1}$, então D não é derivação interna.

2. a) (0,5 pt) Definir álgebra de Lie solúvel. Mostrar que a álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores $n \times n$ é solúvel.

b) (0,5 pt) Se $V \neq 0$ é espaço vetorial, $\dim V < \infty$, e $L \subseteq gl(V)$ é uma álgebra de Lie solúvel, mostrar que $L = 0$, ou L tem ideal K de codimensão 1. (Isto é, $\dim L/K = 1$.)

c) (0,75 pt) Nas notações de (b), mostrar que existe em V um subespaço L-invariante W, que consiste de autovetores para todas as transformações de L.

d) (0,75 pt) Seja $z \in L$ tal que $L = K \oplus \mathbb{C}z$, soma direta de espaços vetoriais. Mostrar que z tem algum autovetor pertencente a W. Mostrar que V contém autovetor comum para todas as transformações lineares de L.

e) (0,5 pt) Se L é solúvel, e V é um L-módulo irredutível, $\dim V = n$, quais valores n pode assumir?

3. a) (1 pt) Definir sistema de raízes Φ num espaço euclidiano. Quais são os possíveis ângulos entre duas raízes em Φ?

b) (1 pt) Se α, $\beta \in \Phi$ são duas raízes não proporcionais e se o ângulo entre α e β é agudo, mostrar que $\alpha - \beta$ de novo é raiz.

c) (1 pt) Desenhar o diagrama de Dynkin associado ao sistema de raízes A_4. A partir do diagrama de A_4, escrever a respectiva matriz de Cartan.

PRECISAM ESCOLHER ENTRE EX4 E EX5. SE ESCREVER SOBRE OS DOIS SOMENTE O MELHOR RESULTADO DOS DOIS SERÁ CONSIDERADO.

4. a) (0,5 pt) Se L é uma álgebra de Lie semissimples, definir o que é uma subálgebra toral (ou toroidal) maximal H de L. Definir o conjunto de raízes Ψ de L relativo a H.

b) (1 pt) Se L é semissimples, e $\dim L = n$, quais dos números naturais 3, 4, 5, 6, 7 podem ser iguais a n? (Justificar suas respostas!)

5. a) (0,5 pt) Definir álgebra universal envolvente (ou envelopante) de uma álgebra de Lie L. Enunciar o teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt.

b) (1 pt) Seja L uma álgebra de Lie semissimples, e seja H uma subálgebra maximal toroidal (toral) de L. Mostrar que H é uma subálgebra de Cartan de L.

MM 444, Álgebra não Comutativa
Exame de Qualificação ao Doutorado

Março de 2021

TODAS AS RESPOSTAS DEVEM SER JUSTIFICADAS.

1. a) (1 pt) Sejam A e B duas álgebras centrais e simples (de dimensão finita) sobre o corpo F, mostrar que o produto tensorial $A \otimes_F B$ é uma álgebra central e simples sobre F.

b) (1 pt) Definir o grupo de Brauer do corpo F.

c) (0,5 pt) Qual o grupo de Brauer dos corpos $\mathbb{C}$ (complexos), $\mathbb{R}$ (reais)? Qual o grupo de Brauer de um corpo finito F?

2. a) (1 pt) Definir radical de Jacobson, $J(R)$, de um anel R. Mostrar que $J(R/J(R)) = 0$.

b) (1 pt) Se R é um anel artiniano (à direita), mostrar que $J(R)$ é um ideal nilpotente de R.

c) (0,5 pt) Qual o radical de Jacobson do anel das matrizes $M_2(\mathbb{Z}_{180})$ (são as matrizes 2×2 cujas entradas pertencem ao anel $\mathbb{Z}_{180} = \mathbb{Z}/(180)$ dos resíduos na divisão por 180)?

3. a) (0,5 pt) Definir ideal primitivo e ideal primo em um anel R.

b) (0,5 pt) Definir anel semiprimitivo e anel semiprimo. Enunciar o teorema sobre a densidade.

c) (1,5 pt) Se R é um anel semiprimo, e I é um ideal minimal à esquerda de R, mostrar que $I = Re$ para algum idempotente e de R, e o anel $D = eRe$ é um anel de divisão.

PRECISAM ESCOLHER ENTRE EX4 E EX5. SE ESCREVER SOBRE OS DOIS SOMENTE O MELHOR RESULTADO DOS DOIS SERÁ CONSIDERADO.

4. a) (0.75 pt) Enunciar o teorema de Skolem e Noether.

b) (1.75 pt) Demonstrar o teorema de Skolem e Noether.

5. a) (0.75 pt) Enunciar o teorema de Wedderburn e Artin sobre os anéis artinianos e semissimples.

b) (1.75 pt) Demonstrar o teorema de Wedderburn e Artin.