Exame de Qualificação de Doutorado
Análise Funcional
Departamento de Matemática, UNICAMP
12 de Julho de 2019

Q	Notas
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
$\sum$	

Nome:____

RA:____

Assinatura:____

Observação: É proibido desgrampear as folhas da prova. Respostas sem justificativas, ou que não incluam os cálculos necessários, não serão consideradas. Desejo-vos uma boa prova!

(1) (**2 pontos**) Mostre que os espaços vetoriais normados $C[0,1]$ e $L^2[0,2\pi]$ são de dimensão infinita.

(2) (**2 pontos**) Seja X espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ e $(x_n) \subset X$ uma sequência tal que para todo $f \in X^*$

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq M_f, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

onde M_f é uma constante que depende somente de f. Use o Principio de Limitação Uniforme para mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\|x_n\| \leq C, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Mais ainda, use o resultado acima para provar que se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então (x_n) é limitada na norma.

(3) (**2 pontos**) Seja a sequência de funções $(f_n) \subset L^2(\mathbb{R})$ dada por

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & |x| < n, \\ 0, & |x| \geq n. \end{cases}$$

Mostre que $f_n \rightharpoonup 0$ em $L^2(\mathbb{R})$. A sequência (f_n) converge na norma de $L^2(\mathbb{R})$?

(4) (**2 pontos**) Sejam X, Y espaços de Banach.

(a) Define um operador compacto $T : X \to Y$ e dê um exemplo.

(b) Verifique se o operador $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ dado por $(Af)(t) := tf(t)$, $0 \leq t \leq 1$ é compacto.

(5) (a) (**0,5 pontos**) Seja H espaço de Hilbert complexo. Sejam $A_1, A_1 \in \mathcal{B}(H)$ operadores positivos. Mostre que $A_1 A_2$ é positivo se e somente se A_1 e A_2 comutam.

(b) (**1.5 pontos**) Seja H espaço de Hilbert separável. Dado uma sequencia $\{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_n \to 0$, prove que existe um operador compacto T tal que $\sigma(T) = \{\lambda_n\} \cup \{0\}$. Sob qual condição este operador fica auto-adjunto?