EQ Topologia Algébrica - 22 de fevereiro de 2019

Nome: R.A.:

Exercício 1. *(***Obrigatório** *4pt) Responda falso ou verdadeiro dando demonstrações e contra-exemplos como justificativa:*

a *O grupo fundamental de toda superfície de $\mathbb{R}^3$ é abeliano;*

b *Se um espaço topológico X é simplesmente conexo então $H_1(X)$ é trivial;*

c *A cohomologia com coeficientes em um grupo G do espaço X é dada por $H^k(X, G) = Hom(H_k(X), G)$;*

d *Considerando a orientação homológica temos que todo espaço é $\mathbb{Z}_2$-orientável.*

Escolha 3 dos exercícios abaixo para resolver.

Exercício 2. *Mostre que, em* **homologia***, toda sequência exata curta de complexos induz uma sequência exata longa na homologia.*

Exercício 3. *Sabendo que o anel de cohomologia de $\mathbb{R}P^n$ é $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$, mostre que não existe mapa $f : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$ que induz mapa não trivial em $H^1(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ se $n > m$.*

Exercício 4. *Calcule a homologia do toro e da Garrafa de Klein. Este exemplo mostra que a homologia sente a orientação.*

Exercício 5. *Mostre que qualquer mapa $f : S^n \to S^n$ com grau diferente de $(-1)^{n+1}$ possui ponto fixo.*

Exercício 6. *Use Mayer-Vietoris para calcular a homologia de S^n.*

Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
Exame de Análise Funcional - 20/02/2019

Nome: ______________________________ **RA:** ____________

Questão 1. (2,0 pontos) Seja $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ o espaço das funções contínuas definidas em $[-1,1]$ e com valores reais, onde $\|x\|_\infty := \sup_{t\in[-1,1]} |x(t)|$. Defina o funcional f por

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt.$$

(a) Mostre que f está bem definido e é linear.
(b) Mostre que f é contínuo.
(c) Determine $\|f\|$.

Questão 2. (2,0 pontos) Sejam E um espaço de Banach e E^* seu dual. Suponha que $T : E \to E^*$ é um operador linear satisfazendo

$$\langle Tz, z\rangle \geq 0, \qquad \forall z \in E. \tag{1}$$

(a) Seja (x_n) uma sequência de E tal que $x_n \to x$ em E e $Tx_n \to f$ em E^*. Mostre que $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.
(b) Nas hipóteses do item (a), tome $z = x_n - y$ em (1) e conclua que

$$\langle f - Ty, x - y\rangle \geq 0, \qquad \forall y \in E. \tag{2}$$

(c) Use o Teorema do gráfico fechado para mostrar que T é um operador limitado.
DICA: Tome $y = x + tw$ em (2), onde $t \in \mathbb{R}$ e $w \in E$.

Questão 3. (2,0 pontos) Sejam $X \neq \varnothing$ espaço normado e X^* seu dual.

(a) Mostre que dado $x \in X\backslash\{0\}$ existe $\phi \in X^*$ tal que $\phi(x) = \|x\|$ e $\|\phi\| = 1$.
(b) Seja X um espaço de Banach reflexivo. Mostre que se $\phi \in X^*\backslash\{0\}$, então existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ e $\phi(x) = \|\phi\|$.

Questão 4. (1,5 pontos) Sejam X um espaço vetorial normado e $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ um conjunto finito linearmente independente. Mostre que dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, existe $f \in X^*$ (o dual de X) tal que

$$f(x_i) = \alpha_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Questão 5. (2,0 pontos) Seja $T : l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$, definido por

$$T(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, ...).$$

(a) Mostre que T é um operador linear limitado e compacto.
(b) Encontre o espectro de T.