DM–IMECC–UNICAMP 16/11/2019

EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE ANÁLISE FUNCIONAL

Aluno: ______________________________ **RA:** __________

Questão 1. As afirmações abaixo são falsas ou verdadeiras? Demonstre as suas respostas. (Se a sua resposta for: "falsa", a demonstração pode ser um contraexemplo, mas não necessariamente.)

(a) Todo espaço de Banach é reflexivo.

(b) Sejam F um subespaço vetorial de um espaço vetorial normado E tal que $\overline{F} \neq E$. Então existe um funcional $f \in E^*$ (um funcional linear limitado em E) não nulo tal que $f|F = 0$ ($f(x) = 0, \ \forall\, x \in F$).

(c) Toda sequência limitada em ℓ^1 tem uma subsequência que converge fracamente em ℓ^1 (ou seja, na topologia $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$).

(d) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Então $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ é separável.

2. Seja E o espaço de Banach $C([a, b])$ das funções contínuas reais definidas no intervalo compacto $[a, b]$, qualquer, munido da norma do máximo, $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Dados números (reais) $\beta \geq \alpha$, mostre que o conjunto K das funções f não crescentes em E tais que $f(a) = \beta, \ f(b) = \alpha$ é um conjunto convexo, limitado e fechado em E.

3. Sejam $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ uma base de Schauder em um espaço de Banach $(E, \|\cdot\|)$, de dimensão infinita, e $P_n : E \to E$, $n = 1, 2, \cdots$, as projeções em relação a essa base: $P_n x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \quad \text{se} \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

(a) Mostre que $\|x\|_1 = \sup_n \|P_n x\|$ é uma norma em E e que os espaços $(E, \|\cdot\|)$, $(E, \|\cdot\|_1)$ são iguais topologicamente (os abertos dados pelas duas normas são os mesmos).

(b) Mostre que $\sup_n \|P_n\| < \infty$. (Aqui, $\|P_n\|$ é a norma de P_n como um operador linear limitado de E em E.)

4. Mostre que a inclusão $C^1([a, b]) \subset C([a, b])$ é um operador (linear) compacto. (Aqui, $[a, b]$ é um intervalo compacto arbitrário de $\mathbb{R}$ e as normas em $C^1([a, b])$ e $C([a, b])$ são dadas, respectivamente, por $\|f\|_1 = \sup_{x\in[a,b]}(|f'(x)| + |f(x)|)$ e $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.)

5. Sejam E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E)$ (um operador linear limitado $T : E \to E$) tal que $T^2 = I$ e $T \neq \pm I$. Mostre que $\sigma(T) \subset \{-1, 1\}$ e determine o operador $R = (T - \lambda)^{-1}$ para $\lambda \neq \pm 1$. Não comece com o operador R dado; mostre (exiba) como você determina (encontrou) o mesmo.

1	2	$\sum$

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame de Qualificação em Introdução a Topologia Algébrica — 11/12/2019

NOME:____ **RA:**________________

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

1) Responda **Verdadeiro** ou **Falso** justificando a resposta.

i- (1pt) Dada $f : S^n \to S^n$ um mapa contínuo que não é uma equivalência homotópica, então f possui um ponto fixo.

ii- (1pt) Toda função contínua de $g : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ tem um ponto fixo.

iii- (1pt) Se $f : S^1 \to S^1$ então $C_f = C(S^1) \cup_f S^1$ é um espaço contrátil.

iv- (1pt) $S^1 \vee S^1$ é um retrato de deformação de $S^1 \times S^1$.

2) Calcule os seguintes grupos

i- (1pt) $\overline{H}_*(S^n; \mathbb{Z})$,

ii- (1pt) $H_*(S^4 \times S^2, \mathbb{Z}_4)$

iii- (1pt) $H_*(K, \mathbb{Z}_2)$ para K a garrafa de Klein.

vi- (1pt) $H_n(\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2)$

v- (1pt) $H_2(\mathbb{C}P^1 \times S^3)$.

vi- (1pt) $\pi_i(\mathbb{C}P^n)$ para $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$.

Exame de Qualificação, Doutorado
Álgebra Não Comutativa
13 de dezembro de 2019

1. a) (0,5 pt) Definir ideal primitivo de um anel R. Enunciar o teorema sobre a densidade.

b) (1 pt) Mostrar que um anel R $(1 \in R)$ é primitivo (à direita) se e somente se R tem um módulo V_R (à direita) fiel e irredutível.

c) (1 pt) Mostrar que se R $(1 \in R)$ é um anel primitivo então ele é primo. A recíproca desta afirmação é válida?

d) (1 pt) Se $1 \in R$ e R é um anel simples, mostrar que ele é primitivo. A recíproca desta afirmação é válida?

2. a) (0,5 pt) Definir o radical de Jacobson $J(R)$ de um anel R. Qual o radical de Jacobson $J(M_n(F))$ do anel das matrizes $n \times n$ sobre um corpo F?

b) (1 pt) Se R é qualquer anel, mostrar que

$$J\begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(R) & R \\ 0 & J(R) \end{pmatrix}, \qquad J\begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(R) & J(R) \\ J(R) & J(R) \end{pmatrix}.$$

c) (0,5 pt) Se $R = \mathbb{Z}_{210}$, o anel dos resíduos módulo 210, qual o radical de Jacobson dos dois anéis de (b)?

3. a) (1,5 pt) Sejam A e B duas álgebras unitárias sobre o corpo F, e sejam $P \subseteq A$, $Q \subseteq B$ subálgebras contendo os elementos 1 de A e de B, respectivamente. Demonstrar que o centralizador $C_{A\otimes B}(P \otimes Q) = C_A(P) \otimes C_B(Q)$. (Aqui os produtos tensoriais são sobre o corpo F.)

b) (1 pt) Seja D um anel de divisão com centro $Z = Z(D)$ e tal que $\dim_Z D < \infty$. Se K é um subcorpo maximal de D mostrar que $D \otimes_Z K \cong M_n(K)$ para algum número natural n.

c) (0,5 pt) Se D é como em (b), e $L = \overline{Z}$ é o fecho algébrico de Z, mostrar que $D \otimes_Z L \cong M_m(L)$ para algum número natural m.

4. (1 pt) Definir o grupo de Brauer de um corpo F. Explicitar qual a operação neste grupo e justificar que ela é bem definida. Qual o elemento neutro e como são definidos os inversos no grupo de Brauer?

5. a) (0,5 pt) Enunciar o teorema de Burnside sobre os grupos periódicos de matrizes.

b) (1 pt) Se G é um subgrupo periódico de $GL_2(\mathbb{R})$, o grupo das matrizes invertíveis 2×2 com entradas reais, ele é finito?