| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

# Prova de Grupos de Lie – MM-448

4 de agosto de 2021

**NOME:**________________________________ **RA:**__________________________.

Responda a **cinco** das questões abaixo e marque com $\times$ no quadro acima aquela que **excluir** (alternativamente, reproduza o quadro acima na folha de rosto de sua prova).

1. (a) (1pt) Seja $G$ um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Mostre que se $H$ e $G/H$ são espaços topológicos compactos, então $G$ é um grupo compacto.

   (b) (1pt) Utilizando o item anterior, mostre que o grupo $\mathrm{SO}(n)$ é compacto.

2. (a) (1pt) Prove que $\pi_1(\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$;

   (b) (1pt) Dê exemplo de um grupo de Lie $G$ tal que $\pi_1(G) = \pi_1(\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R}))$, mas $G$ e $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ não são isomorfos.

3. (2pt) Sejam $\phi, \psi : G \to H$ homomorfismos entre grupos de Lie $G, H$. Prove que se $G$ é conexo e $(d\phi)_e = (d\psi)_e$ então $\phi = \psi$. Este resultado é válido se $G$ não é conexo?

4. (2pt) Seja $G$ um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo de Lie. Mostre que $gHg^{-1}$ é um subgrupo de Lie com algebra de Lie $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}$, onde $\mathfrak{h}$ é a álgebra de Lie de $H$

5. (a) (0.5 pt) Seja $G$ um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Mostre que todo elemento $g \in G$ na imagem de $\exp : \mathfrak{g} \to G$ admite "raíz quadrada", isto é, existe $h \in G$ tal que $h^2 = g$.

   (b) (0.75 pt) Mostre que todo $A \in \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ satisfaz $\mathrm{tr}(A^2) \geq -2$;
   *Dica: A anula seu polinômio característico*

   (c) (0.75 pt) Conclua que $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ não está na imagem de $\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$.

6. (2pt) Seja $G$ um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo. Mostre que um subgrupo conexo e próprio $H \subset G$ não é denso em $G$.

**IMECC/Unicamp**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
Exame de Qualificação ao Doutorado
MM591 - Análise de Fourier e Distribuições

**RA:** ____________ **Nome:** ____________________________________

**Q1.** Considere a função $f$ periódica de período 1 dada por $f(\theta) = \frac{1}{2} - \theta$, no intervalo $[0, 1)$.

(a) Calcule a série de Fourier de $f$, analise sua convergência e calcule seu limite.

(b) Use o item anterior para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**Q2.** Assinale verdadeiro ou falso nas afirmações abaixo e justifique sua resposta.

( ) Se $f \in C(\mathbb{T})$ então a série de Fourier de $f$ é convergente para todo $x \in \mathbb{T}$.

( ) Considere

$$S[f](x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{\sqrt{1+k^2}} e^{2\pi i k x}$$

Então $S[f]$ representa a série de Fourier de uma função $f \in L^2(\mathbb{T})$.

( ) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{f}$ tem suporte compacto então $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

( ) A transformada de Fourier pode ser definida para distribuições $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ por $\langle \mathcal{F}(F), \varphi \rangle := \langle F, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

**Q3.** (a) Construa uma sequência $\{F_n\}_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $F_n$ converge a $\delta$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, quando $n \to \infty$, onde $\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0)$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Prove que $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

(c) Mostre que $\delta$ não pode ser representado por uma função localmente integrável.

**Q4.** Considere o funcional $PV\frac{1}{x} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\left\langle PV\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \text{ para cada } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

(a) Mostre que $PV\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

(b) Calcule a transformada de Fourier de $PV\frac{1}{x}$.

**IMECC/Unicamp**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
Exame de Qualificação ao Doutorado
MM425- Análise Funcional I

**RA:** ____________ **Nome:** ____________________________________

Responda a **no máximo quatro** das questões abaixo.

**Q1.** Seja $\mathcal{F}$ o subespaço de todas as *séries finitas de Fourier*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (a_n \sin nx + b_n \cos nx), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

no espaço de funções contínuas $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ com sua norma canônico $||f||_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$. Mostre que o mapa derivação $D : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definido pelo $D(f) = f'$ *não* é contínuo em $\mathcal{F}$.

**Q2.** Seja $H$ um espaço de Hilbert. Seja $M$ um subespaço fechado de $H$, e seja $P$ a *projeção ortogonal* de $H$ sobre $M$. Prove que $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ para todo $x, y \in H$.

**Q3.** Seja $H$ um espaço de Hilbert, e seja $S = (x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequencia ortonormal em $H$. Prove que $S$ é fechado e limitado, mas não é compacto.

**Q4.** (a) Escreva o teorema da categoria de Baire (sem demonstração).

(b) Uma *base de Hamel* B de um espaço vectorial $E$ é um subconjunto de $E$ que é linearmente independente e span$(B) = E$. Seja $X$ um espaço de Banach com dimensão infinita. Use $(a)$ para provar que cada base de Hamel de $X$ é não-enumerável.

**Q5.** Seja $E$ um espaço de Banach. Para cada $f \in E$, definir um funcional $\hat{f} : E^* \to \mathbb{C}$ no espaço dual de $E^*$ pelo

$$\hat{f}(\phi) = \phi(f) \qquad \forall \ \phi \in E^*.$$

Mostre que $\hat{f}$ pertence a $E^{**} := (E^*)^*$ (o segundo dual de $E$).

**Q6.** (a) Enuncie o teorema de Hahn-Banach (sem demonstração).

(b) Seja $X$ um espaço linear com norma e $Y$ um subconjunto de $X$. Mostre que span$(Y)$ é denso em $X$ se e só se o seguinte é verdade:

$$\phi \in X^* \ \ \textit{com} \ \ \phi(y) = 0 \ \ \forall \ y \in Y \qquad \Longrightarrow \qquad \phi \equiv 0.$$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

# MM427 - Exame de Qualificação– 06/08/2021

**Nome:**________________________________________ **RA:**______________

**Atenção:** Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas! Todos os anéis considerados nesta prova são comutativos com $1 \neq 0$.

1) Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) (10 pt.) Seja $k$ um corpo . Então para o anel $A = k[x]$, o radical de Jacobson é igual ao nilradical.

   (b) (10 pt.) A dimensão de Krull de um domínio noetheriano é sempre finita.

   (c) (10 pt.) Sejam $k$ um copro, $A$ uma $k$-algebra finitamente gerada e $P$ um ideal primo de $A$. Então
   $$\text{ht}\,(P) + \text{ dim}\,(\frac{A}{P}) = \text{dim}\,(A).$$

   (d) (10 pt.) Sejam $A$ um anel, $M$ e $N$ dois $A$-módulos finitamente gerados tais que $M \otimes N = 0$. Então $M = 0$ ou $N = 0$.

2) (10 pt.) Seja $A$ um anel não trivial e assuma que, para cada ideal primo $P$ de $A$, a localização $A_P$ não tem elementos nilpotentes diferentes de zero. Mostre que $A$ não tem elementos nilpotentes diferentes de zero.

3) (15 pt.) Seja $k$ um corpo. Considere o anel de polinômios $A = k[x, y, z, w]$ e $m$ um ideal maximal de $A$. Determine a altura de $m$, ht $(m)$.

4) (20 pt.) Seja $A$ um subanel de $B$ tal que $B$ é integral sobre $A$. Mostre

   (a) $\text{dim}(A) = \text{dim}(B)$.

   (b) Se $Q$ é um ideal primo de $B$ e $P := Q \cap A$, então $P$ é um ideal maximal de $A$ se e somente $Q$ é um ideal maximal de $B$.

5) (15 pt.) Seja $k$ um corpo e $A$ uma $k$- algebra finitamente gerada. Mostre que $A$ é Artiniana se e somente se $A$ é uma $k$-algebra finita.

Boa Prova!

# MM 439, Álgebras de Lie
# Exame de Qualificação ao Doutorado

Agosto de 2021

As álgebras de Lie são consideradas sobre o corpo dos complexos, e são de dimensão finita.

**1.** a) (0,5 pt) Definir álgebra de Lie solúvel. A álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores de ordem $n$ é solúvel?

b) (1 pt) Definir álgebra de Lie nilpotente. Se $L$ é nilpotente, ela é solúvel? E se $L$ é solúvel, ela é nilpotente?

c) (1 pt) Seja $L$ uma álgebra de Lie solúvel e de dimensão finita $n$ sobre os complexos, e seja $\rho\colon L \to gl(V)$ uma representação irredutível de $L$, onde $V$ é espaço vetorial complexo, $\dim V < \infty$. Mostrar que $\dim V = 1$.

**2.** Seja $L$ uma álgebra de Lie (de dimensão finita e sobre os complexos).

a) (1 pt) Definir a *forma de Killing* $\kappa$ de $L$. Mostrar que se $M$ é um ideal em $L$ e $\delta$ é a forma de Killing de $M$ (considerado como uma álgebra de Lie), então $\delta$ é a restrição de $\kappa$ sobre $M$.

b) (1,5 pt) Definir álgebra de Lie *semissimples*. Mostrar que $L$ é semissimples se e somente se a forma de Killing de $L$ é não degenerada.

c) (0,5 pt) Seja $L = sl_2(\mathbb{C})$ a álgebra de Lie das matrizes $2 \times 2$ de traço 0, sobre os complexos, com a base canônica ordenada $(x, y, h)$, onde $x = e_{12}$, $y = e_{21}$, $h = e_{11} - e_{22}$. Encontrar a matriz da forma de Killing na base $(x, y, h)$.

**3.** a) (1 pt) Definir *representação* de uma álgebra de Lie. Definir representação irredutível.

b) (0,5 pt) Seja $L = sl_2(\mathbb{C})$ com sua base canônica $(x, y, h)$ como na questão 2c). Seja $V$ um $L$-módulo de dimensão finita. Definir espaços de *peso* $V_\lambda$ e *vetor maximal* de peso $\lambda$ em $V$.

c) (1 pt) Seja $V$ um espaço vetorial com base $v_0$, $v_1$, ..., $v_m$. Definimos uma representação de $L$ em $gl(V)$ por meio das fórmulas

$$hv_i = (m - 2i)v_i, \qquad xv_i = (m - i + 1)v_{i-1}, \qquad yv_i = (i + 1)v_{i+1}, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

(Assumimos $v_j = 0$ se $j < 0$ ou $j > m$.)

Mostrar que isso define uma representação de $L$ de dimensão $m+1$. Esta representação é irredutível?

**4.** a) (0,5 pt) Definir *sistema de raízes* $\Phi$ num espaço euclidiano. Definir *matriz de Cartan* de $\Phi$.

b) (1 pt) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Justificar que $A$ é a matriz de Cartan de um sistema de raízes $\Phi$. Desenhar o diagrama de Dynkin associado à matriz $A$ (e ao $\Phi$).

**5.** (0,2 pt) Definir *álgebra livre* de Lie.

b) (0,8 pt) Definir *álgebra universal envolvente* (ou envelopante) de uma álgebra de Lie $L$. Enunciar o teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt. Qual a álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie abeliana e de dimensão 2021?

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

# Prova de Introdução à Topologia Algébrica – MM-447

4 de agosto de 2021

**NOME:**______________________________________ **RA:**____________________________.

Responda a **cinco** das questões abaixo e marque com $\times$ no quadro acima aquela que **excluir** (alternativamente, reproduza o quadro acima na folha de rosto de sua prova).

1. A sequência de Mayer-Vietoris é uma técnica importante para computar os grupos de homologia de uma variedade topológica.
   (a) (10 pontos) Defina a sequência de Mayer-Vietoris em um espaço topológico $X$.
   (b) (15 pontos) Determine, a partir dos axiomas de homologia, a homologia reduzida da esfera $S^n$.

2. Seja $G$ um grupo. Um $K(G,1)$-*espaço* é um espaço topológico, conexo por caminhos, com recobrimento universal contrátil e cujo grupo fundamental é isomorfo a $G$.
   (a) (10 pontos) Dê um exemplo de um $K(\mathbb{Z},1)$-espaço e de um $K(\mathbb{Z}^2,1)$-espaço.
   (b) (15 pontos) Seja $X$ um CW-complexo conexo tal que todo homomorfismo $\phi : \pi_1(X) \to G$ é trivial; mostre que todo mapa contínuo $f : X \to K(G,1)$ é homotopicamente nulo.

3. (25 pontos) Seja $n \in \mathbf{N}$ arbitrário. Dê um exemplo de espaço $X$ que tenha grupos de homologia
$$H_0(X,\mathbb{Z}) = H_n(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_{n-1}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z} \quad \text{e} \quad H_q(X,\mathbb{Z}) = 0, \qquad \text{para } \ 0 < q < n.$$

4. Seja $M$ um CW-complexo de dimensão finita $m$, e denote por $M^n$ o $n$-ésimo esqueleto de $M$. Determine
   (a) (10 pontos) $H_k(M) = 0$ para $k > m$.
   (b) (15 pontos) $H_k(M^n, M^{n-1})$ em função das $n$-células de $M$.

5. Determine se cada enunciado a seguir é **verdadeiro ou falso**, e justifique cada resposta.
   (a) (06 pontos) Existe a fibração $S^7 \cdots S^{16} \to S^9$.
   (b) (06 pontos) $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{C}P^n$ são espaços simplesmente conexos para todo $n \geq 1$.
   (c) (06 pontos) $S^n$ tem um campo vetorial não nulo se, e somente se, $n$ é ímpar.
   (d) (07 pontos) $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

6. (25 pontos) Prove que o recobrimento universal de um espaço topológico é único, a menos de homeomorfismo.